



Déploiement adaptatif d'un réseau de capteurs mobiles pour le suivi d'un phénomène évolutif décrit par des équations aux dérivées partielles.

Alban Vergnaud

► To cite this version:

Alban Vergnaud. Déploiement adaptatif d'un réseau de capteurs mobiles pour le suivi d'un phénomène évolutif décrit par des équations aux dérivées partielles.. Automatique / Robotique. Université d'Angers, 2015. Français. NNT : 2015ANGE0014 . tel-01266668

HAL Id: tel-01266668

<https://theses.hal.science/tel-01266668>

Submitted on 3 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Alban VERGNAUD

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le label de l'Université Nantes Angers Le Mans*

Discipline : Sciences de l'ingénieur

Laboratoire : Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS EA7315)

Soutenue le 04 décembre 2015

École doctorale : 503 (STIM)

Thèse N° : 77912

Déploiement adaptatif d'un réseau de capteurs mobiles pour le suivi d'un phénomène évolutif décrit par des équations aux dérivées partielles.

JURY

Rapporteurs : **M. Rachid MALTI**, Professeur des universités, Université de Bordeaux, (IMS, UMR CNRS 5218)
M. Benjamin REMY, Professeur des universités, Université de Lorraine, (LEMTA, UMR CNRS 7563)

Examineur : **M. Francisco CARRILLO**, Professeur des universités, ENI de Tarbes, (LGP)
M. Régis OUVRARD, Maître de conférences, Université de Poitiers, (LIAS)
M. Fabrice RIGOLLET, Maître de conférences, Université de Marseille, (IUSTI UMR CNRS 7343)

Directeur de thèse : **M. Laurent AUTRIQUE**, Professeur des universités, Université d'Angers, (LARIS)

Co-encadrante de thèse : **M^{me} Laetitia PEREZ**, Maître de conférences, Université de Nantes, (LTN UMR CNRS 6607)

Co-encadrant de thèse : **M. Philippe LUCIDARME**, Maître de conférences, Université d'Angers, (LARIS)

Remerciements

J'aimerais tout d'abord adresser mes remerciements à mes encadrants le Pr Laurent Autrique, le Dr-HDR Laetitia Perez et le Dr Philippe Lucidarme pour leur encadrement, leur soutien et la confiance accordée tout au long de ces trois années de thèse.

Je tiens à remercier Jean-Louis Boimond pour m'avoir accueilli au sein du LARIS et ainsi m'avoir permis de réaliser cette thèse de doctorat.

Je tiens à adresser mes remerciements à l'ensemble des membres du Jury. Je remercie le Pr Rachid Malti de l'université de Bordeaux et le Pr Benjamin Remy de l'université de Lorraine d'avoir accepté de rapporter ce travail et pour leur remarques constructives. Je tiens à remercier aussi le Pr Francisco Carrillo de l'ENI de Tarbes d'avoir accepté d'être président de mon jury de thèse. Mes remerciements vont aussi au Dr Régis Ouvrard et au Dr Fabrice Rigollet pour avoir accepté d'examiner cette thèse ainsi que pour leurs remarques intéressantes et constructives.

Je tiens à remercier mes collègues doctorants ou anciens doctorants pour leur bonne humeur et les bons moments passés en leur compagnie (Merci à Remy, Lamia, Rabah, Yann, Phong, Adil, Landry,...).

Mes remerciements vont aussi aux membres du LARIS pour leur accueil et leurs conseils avisés du monde de la recherche et de l'enseignement. Merci au personnel de l'ISTIA pour leur disponibilité et leur bonne humeur.

Enfin, Je souhaite vivement remercier ma famille (mes parents, mon frère, ...) ainsi que mes amis pour leur confiance et leur soutien tout au long de ces années universitaires. Je tiens à remercier Sophie qui m'a soutenue tout au long de ces trois dernières années.

À mes parents
À Sophie.

Table des matières

Table des matières	5
Nomenclature	9
Introduction	13
Chapitre 1. Contexte didactique.....	17
1. Les Problèmes inverses.	18
1.1. Généralités sur les Problèmes inverses.	18
1.2. Méthodes hors ligne de résolution de problème inverse.	20
1.2.1. La régularisation de Tikhonov	20
1.2.2. La régularisation par décomposition en valeurs singulières (DVS).....	21
1.2.3. Les méthodes de régularisation itérative	22
1.2.4. La méthode du gradient	22
1.3. Méthodes en ligne de résolutions des problèmes inverses.....	24
1.3.1. Le filtre de Kalman conventionnel.....	24
1.3.2. Les moindres carrés récursifs.....	26
2. Exemple illustratif de la méthode du gradient conjugué en ligne.....	29
2.1. Identification de la conductivité thermique en géométrie 1D.....	30
2.2. Implémentation de la Méthode du Gradient Conjugué Hors Ligne (MGC-HL).	33
2.2.1. Le problème inverse.	34
2.2.2. Le problème de sensibilité.....	36
2.2.3. Le problème adjoint.....	40
2.2.4. Résultats numériques.....	45
2.3. Implémentation de la Méthode du Gradient Conjugué En Ligne (MGC-EL).	48
2.3.1. Intervalle de temps glissant pour la MGC.....	48
2.3.2. Stratégie de Décalage Constant (MGC-EL-DC):.....	49
2.3.3. Stratégie de Décalage Adaptatif (MGC-EL-DA):.....	53
3. Bilan de chapitre.....	57
Chapitre 2. Identification quasi en ligne.....	59
1. Identification de densité de flux de sources mobiles chauffantes.....	60

1.1. Présentation du système étudié.....	61
1.2. Problème Inverse.....	65
1.2.1. Formulation du problème.....	65
1.2.2. Le problème de sensibilité.....	66
1.2.3. Le problème adjoint.....	66
1.3. Résultats numériques.....	69
1.3.1. La méthode du gradient conjugué hors ligne (MGC-HL).....	69
1.3.2. La méthode du gradient conjugué en ligne (MGC-EL).....	70
1.3.3. La méthode du gradient conjugué en ligne prédictive (MGC-EL-P).....	81
1.3.4. La méthode du gradient conjugué en ligne prédictive avec taille de fenêtre automatique (MGC-EL-PA).....	84
1.4. Bilan.....	89
2. Identification du couple flux & trajectoire	90
2.1. Présentation du système d'étude.....	90
2.2. Problème Inverse.....	93
2.2.1. Le problème de sensibilité.....	93
2.2.2. Le problème adjoint.....	94
2.3. Résultats numériques.....	95
2.3.1. Estimation par la méthode du gradient conjugué hors ligne MGC-HL.....	97
2.3.2. Estimation par la méthode du gradient conjugué en ligne (MGC-EL-PA).....	100
2.4. Bilan.....	105
3. Bilan du chapitre.....	106
<i>Chapitre 3. Stratégies d'observations.....</i>	<i>107</i>
1. Placement optimal de capteurs	108
1.1. Stratégies de placement optimal de capteurs.....	109
1.2. Stratégies de choix de capteurs.....	110
1.3. Stratégies avec capteurs mobiles.....	110
1.4. Bilan.....	111
2. Choix de capteurs dans un réseau fixe	112
2.1. Présentation du système étudié.....	113
2.2. Problème inverse.....	116
2.2.1. Formulation.....	116
2.2.2. Problème de sensibilité.....	116

2.2.3. Problème adjoint.....	117
2.3. Résultats numériques.....	118
2.3.1. Méthode du gradient conjugué Hors-ligne	118
2.3.2. Stratégie de choix de capteurs.....	121
2.3.3. Stratégie de choix de capteurs en ligne	129
2.4. Bilan	132
3. Déploiement adaptatif de capteurs mobiles	133
3.1. Présentation du système étudié.....	133
3.2. Problème inverse	135
3.2.1. Le problème de sensibilité.....	136
3.2.2. Le problème adjoint.....	137
3.3. Stratégies de déploiement de capteurs.....	139
3.3.1. Méthode 1 : choix de zones pertinentes dans un quadrillage fixe	142
3.3.2. Résultats de la méthode 1.	145
3.3.3. Méthode 2 : choix de zones pertinentes sans quadrillage fixe	150
3.3.3. Résultats de la méthode 2.	153
3.4. Bilan	157
4. Bilan du chapitre	159
<i>Conclusion Générale.....</i>	<i>161</i>
<i>Production scientifique</i>	<i>165</i>
Revue scientifique.....	165
Colloques internationaux.....	165
Colloques nationaux.....	166
<i>Annexe A Calcul du retard</i>	<i>167</i>
A.1. Décalage à pas constant	167
A.2. Décalage à pas Adaptatif	169
<i>Annexe B Conception du prototype</i>	<i>173</i>
B-1 - Description globale du système.....	173
B-2 - Les différents éléments constitutifs	175
B-2-1. Les sources chauffantes.....	175

B-1-2. Les capteurs.....	176
B-1-3. Les robots.....	177
B-1-4. La caméra.....	177
B-1-5. Le routeur Wifi.....	178
B-3. Protocole de communication	178
B-4. Localisation basée sur la vision.....	179
<i>Annexe C. Validation du modèle 2D</i>	<i>181</i>
<i>Bibliographie</i>	<i>185</i>

Nomenclature

<i>Symbole</i>	<i>Unité</i>	<i>Description</i>
θ	K	Température simulée
$\hat{\theta}$	K	Température mesurée
θ_0	K	Température initiale
$\delta\theta$	K	Variation de température
Ω		Domaine géométrique étudié
$\partial\Omega = \Gamma$		Frontière de Ω
\vec{n}		Vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur à la frontière $\partial\Omega$
(x, y, z)	m	Variable d'espace
e	m	Epaisseur de la plaque
l	m	Largeur de la plaque
r_j	m	Rayon de la source chauffante
L	m	Longueur de la plaque
I		Centre du disque chauffant
t	s	Variable de temps
t_f	s	Temps final
T	s	Intervalle de temps $T = [0, t_f]$
ΔT	s	Pas d'échantillonnage
N_t		Nombre de pas d'échantillonnage
λ	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	Conductivité thermique du matériau
ρc	$\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$	Chaleur volumique

α	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$	Diffusivité thermique
h	$\text{W}.\text{m}^{-2}.\text{K}^{-1}$	Coefficient d'échange convectif
$\phi(t)$	$\text{W}.\text{m}^{-2}$	Intensité du flux de chauffe
Φ	$\text{W}.\text{m}^{-2}$	Flux de chaleur
μ_{res}	K	Moyenne résiduelle
σ_{res}	K	Écart type résiduel
μ_{delay}	s	Retard moyen sur l'identification
t_{id}	s	Temps d'identification
t_{ex}		Temps expérimental («réel »)
C_m		Capteur de température numéro m
N_C		Nombre de capteurs
N_m		Nombre de mesures effectuées par chaque capteur C
$N_{\mathcal{T}}$		Nombre de résolution de problème d'identification
J		Fonctionnelle à minimiser
∇J		Gradient de la fonctionnelle à minimiser J
J_{stop}		Test d'arrêt
ℓ		Lagrangien de la fonctionnelle
d		Direction de descente
γ		Profondeur de descente
δ_D		Distribution de Dirac
μ		Paramètre de régularisation
k		Nombre d'itérations
maxiter		Nombre maximal des itérations
ψ		Fonction adjointe

s_i	fonction chapeau
tr	Transposée d'une matrice
$\ .\ $	Norme Euclidienne
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire
L^2	Norme L^2

Abréviations :

EDP	Equations aux Dérivées Partielles
SPD	Système à Paramètres Distribués
MGC-HL	Méthode du Gradient Conjugué Hors Ligne
MGC-EL	Méthode du Gradient Conjugué En Ligne
MGC-EL-DC	Méthode du Gradient Conjugué En Ligne avec Décalage à pas Constant
MGC-EL-DA	Méthode du Gradient Conjugué En Ligne avec Décalage à pas Adaptatif
MGC-EL-P	Méthode du Gradient Conjugué En Ligne Prédictive
MGC-EL-P-DC	Méthode du Gradient Conjugué En Ligne Prédictive avec Décalage à pas Constant
MGC-EL-P-DA	Méthode du Gradient Conjugué En Ligne Prédictive avec Décalage à pas Adaptatif
MGC-EL-PA	Méthode du Gradient Conjugué En Ligne Prédictive avec taille de fenêtre Adaptative
MGC-EL-PA-DC	Méthode du Gradient Conjugué En Ligne Prédictive avec taille de fenêtre Adaptative et Décalage à pas Constant
MGC-EL-PA-DA	Méthode du Gradient Conjugué En Ligne Prédictive avec taille de fenêtre Adaptative et Décalage à pas Adaptif

Introduction

De nos jours la protection de l'environnement et des personnes nécessite le recours à des capteurs permettant de suivre le déplacement de phénomènes mobiles pour prédire et agir sur leur évolution. C'est le cas par exemple lorsqu'il s'agit d'observer le déplacement des nuages polluants pour prévenir les populations et envisager une stratégie d'évacuation. Dans ce cas, on peut placer en milieu urbain de très nombreux capteurs fixes, situés judicieusement de manière à mailler au mieux les zones à forte densité démographique. On peut aussi disposer de quelques véhicules mobiles équipés de très nombreux dispositifs de mesure et se déplaçant sur les axes routiers afin de suivre et prédire le déplacement des polluants. Les trajectoires de ces véhicules dépendent alors de l'évolution du nuage surveillé, des déplacements des autres véhicules et des contraintes environnementales (présence de routes et d'immeubles). Enfin des drones dédiés au survol en milieu urbain peuvent être aussi instrumentés.

Une seconde situation est relative au déplacement d'une nappe d'hydrocarbures, en mouvement sur la mer suivant l'action concertée du vent et de la houle. Le suivi peut être réalisé par des embarcations ponctuelles (en surface de la mer) ou encore par des drones. Dans ce cas, il n'y a pas de contraintes sur les déplacements de capteurs (excepté les collisions et éventuellement s'il est interdit pour les embarcations d'être à l'intérieur de la nappe surveillée). Ce type de suivi est particulièrement important afin d'organiser au mieux les moyens de lutte contre les marées noires.

Une dernière situation peut être évoquée. Il s'agit de la propagation des feux de forêt afin de prédire le déplacement sur le sol d'un front de flamme progressant selon le vent et la configuration du couvert végétal (flore, configuration rocheuse, nature du sol, réseau hydrographique, nappe). Cette problématique est majeure tant par les dégâts immédiats sur l'environnement que par sa dangerosité pour les êtres vivants. On peut citer par exemples les grands feux de forêts en Grèce durant l'année 2007 qui ont détruit 2700 kilomètres carrés de forêts et de terres agricoles, plus de 2000 bâtiments et provoqué la mort de 84 personnes. En Australie en février 2009, 231 personnes décèdent et plus de 3600 kilomètres carrés sont dévastés. Là encore pour suivre l'évolution du front, il est possible de disposer de véhicules avec des capteurs mobiles, d'un réseau fixe ou encore de drones.



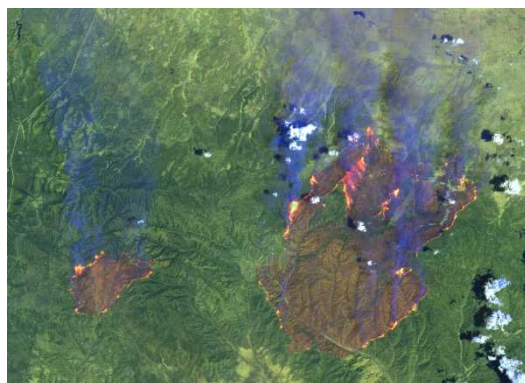
Nuage de polluants



Rejet dans un cours d'eau



Pollution marine



Feux de forêt

Dans les exemples précédents, le phénomène à identifier peut avoir un support spatial ponctuel (localisation du point d'émission d'un polluant), surfacique (incendie ou marée noire) ou volumique (nuage de polluants). Les capteurs peuvent être ponctuels et fixes, ou se déplacer sur une surface (sol pour l'incendie, mer pour la marée noire) ou encore dans l'air. Enfin des contraintes de positionnement pour les capteurs peuvent être envisagées (présence de bâtiments pour les véhicules dans les villes, besoin de chemin dans les forêts ...).

Ces phénomènes physiques de transport, diffusion, conduction, advection sont souvent modélisables par des équations aux dérivées partielles (EDP) éventuellement non linéaires. Bien évidemment, quel que soit leur niveau de complexité les modèles mathématiques ne fournissent qu'une représentation simplifiée du système réel et il serait par exemple illusoire de vouloir prédire mathématiquement avec une excellente précision la propagation d'un incendie. Toutefois, les progrès sont constants comme l'atteste l'exemple des développements dans les prédictions météorologiques. La mise au point d'un outil prédictif pour l'aide à la décision nécessite l'évaluation de certains paramètres d'entrée. Dans ces domaines, les capteurs sont en général coûteux et en nombre limité. Toutefois, de récentes avancées technologiques pour les systèmes de communication et la miniaturisation entraînent une

diminution des coûts. Ainsi, il devient envisageable de concevoir des systèmes mobiles peu coûteux et de déployer un groupe de véhicules en réseau dans un certain nombre d'environnements à risque.

Le sujet de recherche étudié et présenté dans ce document a pour objectif le développement et la validation de stratégies optimales de déplacement d'un ensemble de capteurs pour l'identification paramétrique de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles caractérisés par une ou plusieurs sources mobiles. Ce travail est destiné à développer une méthodologie complète (théorie, méthodes numériques, plate-forme expérimentale) dans le cadre de problèmes mal posés non-linéaires associés à l'identification paramétrique de systèmes décrits par des EDP en génie thermique. Du fait de la pluridisciplinarité de ces travaux de recherche (domaine de la thermique et de l'automatique) une collaboration a été mise en place entre deux laboratoires de l'ouest de la France : le Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS) et le Laboratoire de Thermocinétique de Nantes (LTN).

Les travaux de recherches présentés dans ce rapport se subdivisent en deux thèmes. Le premier thème abordé vise à développer une méthode de résolution de problèmes inverses via une méthode de régularisation basée sur la méthode du gradient conjugué (MGC) « en ligne ». En effet dans la littérature l'estimation de paramètres inconnus pour des modèles régis par des EDPs est réalisée généralement en mode « hors ligne ». Cette méthode de résolution se décompose en une première étape de collecte d'observations du procédé réel étudié (acquisition de données issues de capteurs) suivie d'une seconde étape pendant laquelle l'estimation des paramètres inconnus du modèle associé est réalisée à partir des observations faites précédemment sur le procédé réel. Cette méthode peut se révéler très coûteuse en temps de calcul et ne permet pas de disposer des informations au cours du procédé (ce qui empêche toute prise de décision rapide). Dans le but de pallier cet inconvénient une méthode basée sur une identification des paramètres inconnus au cours de l'acquisition des mesures est présentée dans les deux premiers chapitres.

Le second thème de ce manuscrit s'intéresse au placement de capteurs. Il s'agit de développer une méthode visant à proposer des stratégies d'observation afin de déplacer un ensemble observateurs mobiles (ex : robots mobiles munis de capteurs) de manière à garder toujours une configuration adaptée à la procédure d'identification « en ligne ». En effet, le choix de l'emplacement et le nombre de capteurs influencent directement les résultats et la rapidité de convergence des algorithmes de résolution. Compte tenu des bruits de mesures, un capteur

situé à un emplacement non adéquat apporte plus de bruits inutiles que d'informations pertinentes.

Ce document est articulé et structuré en trois chapitres comme suit :

- Dans le chapitre 1, une présentation de la problématique générale associée à la résolution de problèmes inverses pour des modèles régis par des équations aux dérivées partielles est proposée. Un bref état de l'art relatif aux méthodes de résolution de problème inverses est introduit. Un exemple didactique d'identification de la conductivité thermique dépendante du temps en géométrie unidimensionnel est détaillé. Cet exemple vise à introduire les stratégies développées dans ce document.
- Dans le chapitre 2, une présentation détaillée des procédures d'identification quasi en ligne développées au cours de ces travaux de recherche est proposée. Ces stratégies d'identification en ligne sont toutes basées sur un concept d'identification réalisée sur une fenêtre glissant sur l'horizon temporel des observations. Différentes stratégies sont proposées dans ce chapitre (stratégie de décalage à pas constant, stratégie de décalage à pas adaptatif, choix de taille de fenêtre fixe et automatique). Deux configurations sont étudiées dans ce chapitre. La première s'articule autour de l'identification de deux densités de flux de deux sources mobiles chauffantes. La seconde s'intéresse à l'identification du couple flux & trajectoire d'une source mobile chauffante.
- Le chapitre 3 s'intéresse plus particulièrement aux déploiements de capteurs pour l'identification en ligne afin de permettre une reconfiguration de la position des observateurs au cours du temps. Le premier thème présenté dans ce chapitre est relatif au choix de capteur en ligne dans un réseau fixe afin d'utiliser au cours du temps les capteurs les plus sensibles pour réaliser l'identification de paramètres inconnus. Le second thème concerne les stratégies de déploiement de capteurs en ligne. Celle-ci visent à proposer des méthodes permettant de déployer un ensemble de capteurs mobiles de manière la plus efficiente possible à des fins d'identification.
- Plusieurs annexes sont fournies afin de compléter les explications de certains résultats présentés dans le document.
- Dans une dernière partie, une discussion sur l'ensemble des travaux de recherches réalisés ainsi que les perspectives à court et moyen terme sont présentées.

Chapitre 1.

Contexte didactique

Sommaire

1. Les Problèmes inverses.	18
1.1. Généralités sur les Problèmes inverses.	18
1.2. Méthodes hors ligne de résolutions des problèmes inverses.....	20
1.3. Méthodes en ligne de résolutions des problèmes inverses.....	24
2. Exemple illustratif de la méthode du gradient conjugué en ligne.....	29
2.1. Identification de la conductivité thermique en géométrie 1D.....	30
2.2. Implémentation de la Méthode du Gradient Conjugué Hors Ligne (MGC-HL).....	33
2.3. Implémentation de la Méthode du Gradient Conjugué En Ligne (MGC-EL).	48
3. Bilan de chapitre.....	57

1. Les Problèmes inverses.

1.1. Généralités sur les Problèmes inverses.

L'identification de paramètres distribués (dépendant continument de l'espace et du temps) dans des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles non linéaires est, en général, ardue. Une approche classique consiste à formuler un problème de minimisation par erreur de sortie. Il s'agit par exemple de minimiser un critère quadratique décrivant l'écart entre les sorties prédites par le modèle mathématique et celles observées à l'aide de capteurs (Figure 1.1). Cette démarche consistant à mesurer l'effet pour remonter à la cause définit un problème inverse (Keller, 1976), (Isakov, 1998).

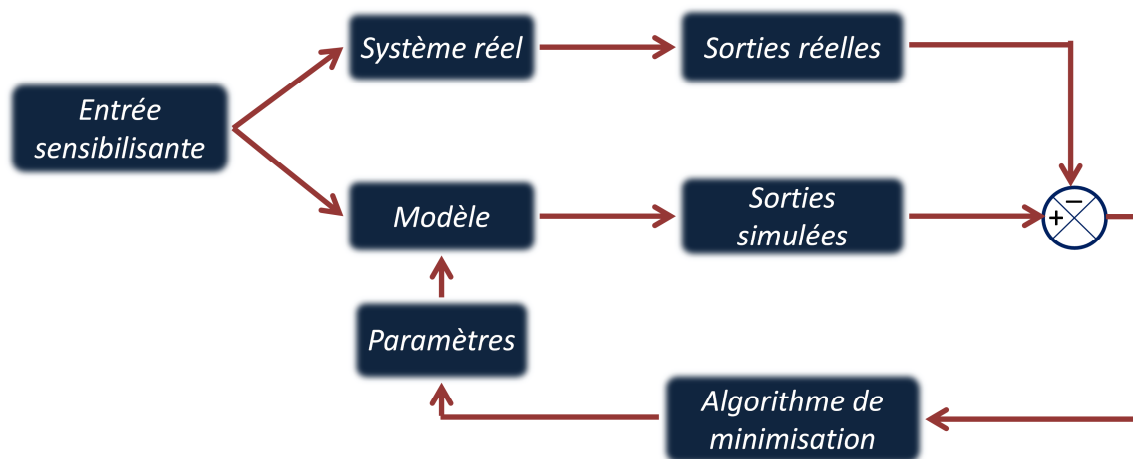


Figure 1.1. Représentation d'un problème inverse.

Dans (Kern, 2002-2003), l'auteur répertorie un grand nombre de domaines s'intéressant aux problèmes inverses. Parmi les domaines cités, voici quelques exemples d'applications

- Le génie civil (recherche de défauts dans des structures de génie civil (Crinière, et al., 2014)), identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse (Pezerat, 1996).
- L'ingénierie thermique : identification paramétrique de densité de flux chauffant, estimation de conditions initiales (Rouquette, et al., 2007), analyse de systèmes intumescents sous haut flux (Gillet, 2009).

D'une manière générale toutes les disciplines scientifiques s'intéressant à la modélisation de systèmes peuvent être concernées par la résolution de ces problèmes. Dans (Beddiaf, 2013), et

(Kern, 2002-2003) plusieurs autres domaines scientifiques s'intéressant aux problèmes inverses sont présentés. Un problème inverse linéaire (ou non linéaire) peut être modélisé suivant la formulation matricielle suivante.

Soit U et Y deux espaces vectoriels normés et l'équation suivante :

$$[A]\{u\} = \{y\} \quad (1.1)$$

avec $\{y\} \in Y$ la sortie du système, $\{u\} \in U$ l'entrée du système, et $[A]$ un opérateur mathématique (linéaire ou non) continu représentant la relation entre la sortie et l'entrée du système.

Dans un cadre matriciel, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $[A]$ est une matrice de dimension $m \times n$.

Le problème inverse visant à retrouver $\{u\} \in U$ associé à la sortie $\{y\} \in Y$ est dit bien posé (au sens d'Hadamard (Hadamard, 1932)) si et seulement si :

- $\forall \{y\} \in Y$, il existe une solution $\{u\} \in U$, (critère d'existence).
- La solution $\{u\}$ est unique, (critère d'unicité).
- La solution $\{u\}$ dépend continûment des données, (critère de stabilité).

Dans le cadre plus spécifique du génie thermique, les problèmes inverses de conduction de la chaleur où l'on cherche à identifier des propriétés du milieu étudié, des flux de chaleur ou encore des conditions initiales, sont mal-posés (Alifanov, 1994). En effet, la condition de stabilité (au sens d'Hadamard (Isakov, 1998)) n'est en général pas satisfaite car de faibles perturbations sur les mesures engendrent de grandes variations sur les paramètres à identifier. Cela peut être illustré dans un cadre matriciel où, lors de la résolution numérique du système d'équations aux dérivées partielles, les matrices d'assemblages obtenues par la méthode des éléments finis (Pepper & Heinrich, 2006) s'avèrent mal conditionnées. L'inversion de telles matrices n'est pas pertinente en présence d'incertitudes sur les mesures (Abou Khachfe, 2000), (Beddiaf, 2013). Dans ce contexte, les travaux réalisés par Tikhonov (Tikhonov & Arsenin, 1977) ont permis de disposer de méthodes conduisant à la construction de solutions stables (Isakov, 1998), (Alifanov O.M., 1994), (Morozov, 1994). Celles-ci sont généralement dénommées « méthodes de régularisation ». Le principe de base est de formuler un nouveau problème considérant un paramètre supplémentaire (dit de régularisation) tel que le nouveau

problème soit stable. Dans le paragraphe suivant quelques méthodes de régularisations sont brièvement présentées.

1.2. Méthodes hors ligne de résolution de problème inverse.

Les méthodes de régularisation sont basées sur le principe de pénalisation de la sensibilité de la solution d'un problème inverse par rapport aux erreurs de mesure. Dans la littérature, un très grand nombre de méthodes ont été développées. Dans le paragraphe suivant quelques méthodes les plus utilisées seront présentées.

1.2.1. La régularisation de Tikhonov

Cette méthode de résolution de problème inverse mal posé par régularisation a été proposée par (Tikhonov & Arsenin, 1977). Elle consiste en l'introduction d'un terme pénalisateur à la fonctionnelle à minimiser.

Soit :

$$J(u, R, \mu) = \|Au - y\|^2 + \mu \|R_n u\|^2 \quad (1.2)$$

Avec : A une matrice d'état, u le vecteur d'état du système et y le vecteur de sortie, μ le coefficient de régularisation et R_n la matrice de Tikhonov (matrice de régularisation). La matrice de régularisation R_n peut prendre plusieurs formes :

➤ Régularisation d'ordre 0 : $R_n = I$ où I est la matrice identité.

➤ Régularisation d'ordre 1 : $R_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ex : pour $n=5$).

➤ Régularisation d'ordre 2 : $R_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ex : pour $n=5$).

Le produit $R_n u$ à l'ordre zéro représente une discrétisation de la fonction $u(t)$, tandis que pour un ordre un il devient une discrétisation de sa dérivée première $\dot{u}(t)$ et pour un ordre deux une discrétisation de sa dérivée seconde $\ddot{u}(t)$.

La solution associée à ce problème peut s'exprimer comme :

$$\hat{u}_\mu = \text{Arg min} \left\{ \|Au - y\|^2 + \mu \|R_n u\|^2 \right\} \quad (1.3)$$

La solution \hat{u}_μ proposée est donc dépendante du paramètre régularisant μ . Le choix de ce paramètre de régularisation est donc primordial. En effet si μ est choisi très grand, la solution recherchée \hat{u}_μ sera erronée et si dans le cas contraire \hat{u}_μ est choisi petit alors l'instabilité due à la caractéristique mal posée du système n'est plus corrigée et les solutions seront toujours instables. Plusieurs travaux ont été proposés par le passé afin de donner une méthode permettant un choix du paramètre μ (Scherzez, et al., 1993), (Gejadze & Jarny, 2002) et plus récemment (Wen & Chuansheng, 2013) proposant une adaptation de la méthode itérative de Tikhonov pour améliorer la rapidité de convergence de la méthode. (Gazzola & Novati, 2014) proposent une méthode permettant de choisir automatiquement la valeur du paramètre régularisant.

1.2.2. La régularisation par décomposition en valeurs singulières (DVS)

La méthode de régularisation par décomposition en valeurs singulières (SVD en anglais) consiste en une décomposition de la matrice $A_{m \times n}$ en trois autres matrices $U_{m \times n}, W_{n \times n}, V_{n \times n}$ ayant chacune une structure bien spécifique. Dans le but d'appliquer cette méthode à la résolution d'un problème inverse linéaire mal conditionné posons $Au = y$ avec A une matrice rectangulaire de dimension $(m \times n)$, u le vecteur d'état du système et y le vecteur de sortie du système.

La technique de DVS consiste en une décomposition de la matrice d'état $A_{m \times n}$ en trois nouvelles matrices $U_{m \times n}, W_{n \times n}, V_{n \times n}$ avec $U_{m \times n}$ et $V_{n \times n}$ des matrices orthogonales et $W_{n \times n}$ une matrice diagonale contenant les valeurs singulières.

Dans le cas où A est une matrice carrée, A^{-1} peut s'exprimer sous la forme :

$$A = UWV^T \Rightarrow A^{-1} = VW^{-1}U^T \quad (1.4)$$

Appliqué au problème présenté ci-dessus visant à trouver le vecteur d'état u associé au vecteur de sortie y , il vient :

$$u = A^{-1}y = VW^{-1}U^T y \quad (1.5)$$

De plus si $A_{m \times n}$ ne possède pas de valeurs singulières nulles, alors u peut s'écrire de la manière suivante :

$$u = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} \frac{\{u_i\}\{y_i\}}{\{w_i\}} \{v_i\} \quad (1.6)$$

u est donc assujettie aux termes contenant les plus petites valeurs de $\{w_i\}$. Pour régulariser, une troncature sur ces valeurs est réalisée pour l'inversion s'écrivant comme :

$$u = \sum_{i=1}^{N_T} \frac{\{u_i\}\{y_i\}}{\{w_i\}} \{v_i\} \quad (1.7)$$

Où

- $\{u_i\}$ et $\{v_i\}$ sont des vecteurs de la base orthogonale des matrices $U_{m \times n}$ et $V_{n \times n}$,
- N_T est l'ordre de troncature,
- $\{w_i\}$ les valeurs singulières de $A_{m \times n}$.

La grande difficulté associée à cette méthode réside dans le choix de l'ordre de troncature qui a une incidence directe sur la stabilité de la solution. Le lecteur est invité à se référer à (Petit & Maillet, 2008) et (Yan-Bin, 2014).

1.2.3. Les méthodes de régularisation itérative

Les méthodes de régularisation itératives sont en général basées sur le principe du calcul du gradient de la fonction coût (quadratique) $f(x)$ à minimiser. Le principal avantage de ces méthodes est qu'elles ne nécessitent pas l'ajout d'un terme régularisant. L'effet itératif joue implicitement le rôle de terme régularisant (Prud'homme & Hung Nguyen, 1998). Cependant, le nombre d'itérations à effectuer est à définir. Ci-dessous est présentée la méthode du gradient qui est l'une des méthodes de base de ces algorithmes itératifs.

1.2.4. La méthode du gradient

Cette méthode repose sur le calcul du gradient $\nabla f(x)$ de la fonctionnelle à minimiser. Le comportement de cette méthode est le suivant :

Soit x^0 choisi comme point de départ de la méthode. Le calcul du gradient $\nabla f(x^0)$ en x^0 est réalisé. $\nabla f(x^0)$ indique la direction de plus grande augmentation de f . Afin de trouver le minimum de f , un déplacement dans la direction opposée à celle donnée par le gradient est réalisé avec une profondeur de descente λ_0 , ce qui conduit donc à la formule suivante :

$$x^1 = x^0 - \lambda_0 \nabla f(x^0) \quad (1.8)$$

La procédure présentée ci-dessus est réalisée itérativement jusqu'à l'obtention d'un minimum local. L'algorithme de la méthode est proposé ci-après.

Algorithme

Initialisation de x^0 et calcul de la profondeur de descente initiale λ_0 (Pour $k = 0$)

Initialisation du nombre d'itérations $k = 1$

Tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait :

- Calcul de la direction de descente $d^k = -\nabla f(x^{k-1})$.
- Calcul du nouvel itéré $x^k = x^{k-1} + \lambda^{k-1} d^k = x^{k-1} - \lambda^{k-1} \nabla f(x^{k-1})$.
- Calcul de la profondeur de descente λ^k .
- Mise à jour de $k = k + 1$.

Fin Tant que

Le vecteur x^k est jugé satisfaisant lorsque le critère d'arrêt est vérifié.

L'algorithme présenté ci-dessus est l'algorithme général de la méthode de gradient. Plusieurs variantes de cette méthode existent on peut citer par exemple : La méthode du gradient à pas prédéterminé, la méthode de gradient à pas optimal, la méthode du gradient à pas variant ainsi que la méthode du gradient conjugué. Pour plus de détails sur ces différentes méthodes le lecteur peut se rapporter aux ouvrages de (Minoux, 2007) et de (Corriou, 2010). La méthode du gradient conjugué introduite par (Hestenes & Stiefel, 1952) sera détaillée dans le second paragraphe de ce chapitre. Bien évidemment il existe un grand nombre de méthodes régularisantes non présentées dans ce document mais très utilisées notamment en génie thermique comme par exemple la méthode de spécification de fonction introduite par (Beck, et al., 1985).

1.3. Méthodes en ligne de résolutions des problèmes inverses.

Les différentes méthodes d'estimation de paramètres présentées ci-dessus sont généralement des méthodes dites « Hors Ligne ». Ces méthodes de minimisation de critère sont appliquées a posteriori sur un ensemble de données récoltées pendant une campagne de mesures. Elles ont pour avantages d'être très robustes et précises mais présentent l'inconvénient majeur de nécessiter la fin de la campagne d'acquisition avant de pouvoir débiter le processus de minimisation. Or dans certaines applications du type « temps réel », il est préférable d'effectuer une évaluation (éventuellement un ajustement) des paramètres inconnus pendant la phase d'acquisition. En Automatique, ces méthodes dites « méthodes En Ligne » ou « méthodes récursives » sont utilisées par exemple pour la commande prédictive (Landau, 2002). Plusieurs méthodes ont été développées à ce sujet, ci-dessous sont présentées deux méthodes (le filtre de Kalman et la méthode des moindres carrés récursifs) très répandues en sciences de l'ingénieur et en automatique.

1.3.1. Le filtre de Kalman conventionnel

Le filtre de Kalman (FK) est une technique permettant de reconstruire l'état d'un système à partir de mesures bruitées. Cette méthode (utilisée aussi pour l'implémentation de filtres Bayésiens) repose sur une estimation courante des paramètres inconnus via une correction apportée sur les erreurs associées au système et aux observations. De plus à chaque pas de temps une estimation du paramètre inconnu peut être obtenue.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x^{k+1} = Ax^k + Bu^k + Gw^k \\ y^k = Cx^k + v^k \end{cases} \quad (1.9)$$

où:

- k : représente l'indice des pas de temps successifs.
- x^k : représente le vecteur d'état du système à l'instant k .
- y^k : représente le vecteur de sortie du système à l'instant k .
- u^k : représente l'entrée du système à l'instant k .
- w^k : représente le bruit du système (erreur de modélisation).
- v^k : représente le bruit de mesure.

Remarque : w^k et v^k sont supposés être des bruits gaussiens de moyenne nulle dont les matrices de covariance sont notées respectivement W et V .

Algorithme du filtre de Kalman

Etape 1 : initialisation

- $k = 0$.
- Choix du vecteur d'état initial $x^{k=0}$ et choix du vecteur d'état estimé $\hat{x}^{k=0} = x^{k=0}$ (dans le cas proposé, aucune incertitude n'est considérée sur l'état initial : $P^{k=0}$).
- Calcul de la Covariance des erreurs de mesure (bruit de mesure). $V = \sigma_y^2$ et la covariance des erreurs de modèle $W = \sigma_x^2$.

Etape 2 : estimation récursive à l'instant $k+1$

- Calcul du gain de Kalman K^k .

$$K^k = (AP^k A^T + GWG^T) C^T (C (AP^k A^T + GWG^T) C^T + V)^{-1}$$
- Calcul de la nouvelle valeur de l'estimation de \hat{x}^{k+1} .

$$K^k = (AP^k A^T + GWG^T) C^T (C (AP^k A^T + GWG^T) C^T + V)^{-1}$$

$$\hat{x}^{k+1} = (I - K^k C) A \hat{x}^k + (I - K^k C) B u^k + K^k y^k$$
- Calcul de la Covariance de l'erreur de l'estimation P^{k+1}

Itération de l'algorithme $k = k + 1$

Récemment (Mechhoud, et al., 2012) ont proposé une méthode permettant l'estimation de la diffusion thermique dans les Plasmas de Tokamak via l'utilisation d'un filtre de Kalman mixte étendu (FKME). Une méthode a été proposée par (Radecki & Hency, 2012) démontrant comment un filtre de Kalman modifié (UKF) augmenté pour l'estimation des paramètres peut précisément apprendre et prédire la réponse thermique d'un bâtiment. Le lecteur peut se référer à (Llibre, 2008) pour plus de détails sur l'algorithme du filtre de Kalman.

1.3.2. Les moindres carrés récurrents

Cet algorithme est utilisé notamment dans le domaine du traitement du signal pour implémenter des filtres adaptatifs. Cherchant à estimer un vecteur inconnu x de dimension n à partir de k lots de mesures y_r de dimension m_r linéaires en x et entachées d'erreurs w_r :

$$y_r = H_r x + w_r, \quad r = 1 \text{ à } k$$

Méthodes des moindres carrés (MCS)

Afin d'estimer x , admettons le système linéaire global présenté ci-dessous et regroupant k lots de mesures y_r , pour $r = 1$ à k , sous la forme :

$$Y_k = A_k x + W_k$$

Avec

$$Y_k = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_k \end{pmatrix}, \quad W_k = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix}$$

$$\dim(Y_k) = \dim(W_k) = m = \sum_{r=1}^k m_r \text{ et } \dim(A_k) = m \times n$$

le nombre de mesures m est supérieur au nombre d'inconnues n et m est assez grand avec suffisamment de lignes indépendantes dans les H_i pour que $\text{rang}(A_k) = n$.

Il s'agit d'estimer \hat{x}_k minimisant la fonctionnelle suivante :

$$J_k = \frac{1}{2} (Y_k - A_k \hat{x}_k)^T R_k^{-1} (Y_k - A_k \hat{x}_k)$$

Avec R_k^{-1} une matrice de pondération symétrique positive. La solution des moindres carrés (Llibre, 2008) s'écrit :

$$\hat{x}_k = (A_k^T R_k^{-1} A_k)^{-1} A_k^T R_k^{-1} Y_k$$

En posant :

$$P_k^{-1} = A_k^T R_k^{-1} A_k$$
$$B_k = A_k^T R_k^{-1} Y_k$$

Le vecteur \hat{x}_k solution linéaire symétrique de :

$$P_k^{-1} \hat{x}_k = B_k$$

s'écrit :

$$\hat{x}_k = P_k B_k$$

Adaptation récursive :

Soit une mesure arrivant à l'instant k , considérant les étapes k et $k-1$. Les relations de récurrence précédentes s'écrivent :

$$P_k = \left(P_{k-1}^{-1} + H_k^T r_k^{-1} H_k \right)^{-1}$$

$$B_k = B_{k-1} + H_k^T r_k^{-1} Y_k$$

Le lecteur est invité à se référer à (Llibre, 2008) pour les détails de calcul permettant d'obtenir les équations précédentes.

En appliquant le lemme d'inversion matricielle suivant (Llibre, 2008) :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

On obtient :

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-1}H_k^T \left(r_k + H_k P_{k-1} H_k^T \right)^{-1} H_k P_{k-1}$$

On pose maintenant :

$$K_k = P_{k-1}H_k^T \left(r_k + H_k P_{k-1} H_k^T \right)^{-1}$$

$$= \left(P_{k-1}^{-1} + H_k^T r_k^{-1} H_k \right)^{-1} H_k^T r_k^{-1}$$

$$= P_k H_k^T r_k^{-1}$$

Il vient :

$$P_k = P_{k-1} - K_k H_k P_{k-1}$$

Et la solution \hat{x}_k devient :

$$\hat{x}_k = P_k B_{k-1} + P_k H_k^T r_k^{-1} y_k$$

L'algorithme des moindres carrés récursifs consiste donc à calculer les trois équations suivantes à chaque nouvelle mesure :

$$\begin{cases} K_k = P_{k-1} H_k^T (r_k + H_k P_{k-1} H_k^T)^{-1} \\ \hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k-1}) \\ P_k = P_{k-1} - K_k H_k P_{k-1} \end{cases}$$

Pour l'initialisation de l'algorithme, il est nécessaire de disposer d'un lot de mesures pour calculer les termes initiaux suivants

$$\begin{cases} P_k = (A_k^T R_k^{-1} A_k)^{-1} \\ \hat{x}_k = P_k A_k^T R_k^{-1} Y_k \end{cases}$$

L'algorithme des moindres carrés récursifs possède un grand nombre de variantes : la méthode des moindres carrés étendus (MMCE), la méthode du maximum de vraisemblance (MMVR), etc. Le lecteur peut se référer à (Landau, et al., 1986) , (Richalet, 1991), (Borne, et al., 1992) pour une présentation détaillée de ces algorithmes.

Les deux algorithmes présentés ci-dessus sont très utilisés en automatique. Cependant lorsque le système étudié se révèle complexe (par exemple système régi par des équations aux dérivées partielles) les temps de calcul peuvent devenir extrêmement longs et l'estimation en temps réel peut s'avérer impossible. De ce constat, une adaptation en ligne d'une méthode de régularisation itérative (méthode du gradient conjugué) a été développée. Cette adaptation est présentée dans la section 2 de ce chapitre à l'aide d'un exemple introductif.

2. Exemple illustratif de la méthode du gradient conjugué en ligne.

Dans le paragraphe suivant, une présentation d'une méthode d'estimation de paramètres inconnus via une méthode de régularisation itérative basée sur la méthode du gradient conjugué (MGC) est proposée. La méthode présentée dans cet exemple est une adaptation de la méthode du gradient conjugué usuellement utilisée (Jarny, et al., 1991), (Abou Khachfe, 2000), (Mohammadiun, et al., 2011), (Beddiaf, et al., 2012) avec une adaptation relative à un principe de fenêtre d'identification glissante au cours du temps.

Les références précédemment citées correspondent à une estimation de paramètres inconnus en utilisant la MGC dite hors ligne. Cette méthode hors ligne d'identification paramétrique est implémentée en deux temps. Une première étape d'acquisition d'observations sur le processus réel étudié est mise en œuvre. Lorsque l'ensemble des observations est réalisé, une seconde étape d'identification pour estimer les paramètres inconnus du modèle est réalisée. Cette méthode est dite hors ligne car l'identification des paramètres ne peut être réalisée que lorsque l'ensemble des observations nécessaires à l'identification est disponible (Figure. 1.2).

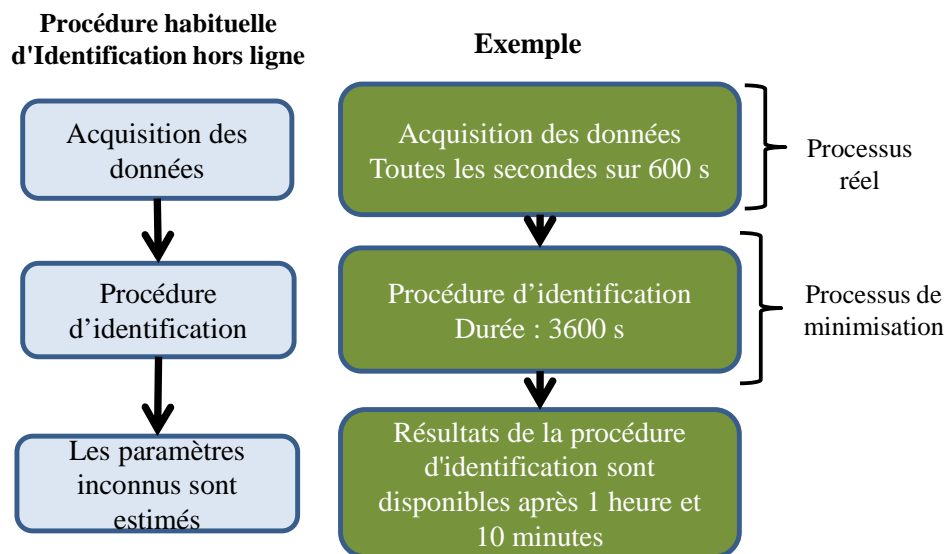


Figure 1.2. Représentation graphique de la méthode hors ligne.

Ci-dessous est présenté un exemple d'identification paramétrique (de la conductivité thermique dépendante de la température dans une géométrie unidimensionnelle) implémenté via une méthode d'identification en ligne.

2.1. Identification de la conductivité thermique en géométrie 1D.

Ce cas académique décrit le phénomène de conduction de la chaleur dans une paroi chauffée uniformément sur toutes les surfaces latérales, ou dans un fil d'épaisseur négligeable (Figure 1.3).



Figure 1.3. Représentation graphique du système étudié.

Considérons un domaine en 1D : $\Omega = [0, L]$ où $L = 0.1 \text{ m}$. La variable temporelle est

indiquée par : $t \in \mathcal{T} = [0, T]$, avec $T = 900 \text{ s}$. Le flux de chauffe $\phi(t) = 10^5 \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{t-450}{200}\right)^2\right)$

est supposé connu sur la frontière $x = L$ (condition de Neumann). Cependant les pertes de chaleur par convection naturelle sont considérées sur les deux frontières du système $x \in \{0, L\}$.

La température initiale (à $t = 0$) est supposée uniforme et égale à la température ambiante.

Dès lors, l'évolution de la température exprimée par $\theta(x, t)$ est solution du système d'équations (1.10) avec les valeurs des paramètres du système données dans le Tableau 1.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(\theta(x, t)) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) = 0 \\ \theta(x, 0) = 0 \\ -\lambda(\theta(x, t)) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial \vec{n}} = \begin{cases} h\theta(x, t) & \text{si } x = 0 \\ h\theta(x, t) - \phi(t) & \text{si } x = L \end{cases} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall (x, t) \in \Omega \times \mathcal{T} \\ \forall x \in \Omega \\ \forall (x, t) \in \{0, L\} \times \mathcal{T} \end{array} \quad (1.10)$$

Tableau 1.1. Paramètres connus du modèle.

Symbole	Définition	Valeur
ρc	Chaleur volumique	$10^6 \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$
h	Coefficient de convection naturelle	$10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
T	Temps final	900 s
$\lambda(\theta)$	Conductivité thermique	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\phi(t)$	Flux de chaleur	Wm^{-2}
\vec{n}	Vecteur unitaire (normale externe pointant vers l'extérieur à $\partial\Omega$)	

Lorsque tous les paramètres sont connus, l'évolution de la température au sein du domaine peut être calculée en utilisant des méthodes numériques (méthode de différences finies ou d'éléments finis, par exemple). Les résultats numériques présentés dans ce document sont issus de la résolution numérique implémentée dans le logiciel Comsol® interfacé avec Matlab®.

La conductivité thermique dépendante de la température $\lambda(\theta)$ est présentée (Figure 1.5). Cette expression de $\lambda(\theta)$ ne correspond pas à un matériau spécifique, même si la gamme $\lambda(\theta) \in [10, 100] \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ décrit une large catégorie de matériaux. La conductivité thermique $\lambda(\theta)$ (Figure 1.5) est décrite comme une fonction continue linéaire par morceaux $\lambda(\theta) = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i s_i(\theta)$ où $N_\lambda = 46$ est la taille du vecteur de paramètres inconnus $\bar{\lambda} = \{\lambda_i\}_{i=1, \dots, N_\lambda}$ et $\{s_i\}_{i=1, \dots, N_\lambda}$ est une fonction chapeau (base des fonctions continues et linéaire par morceaux), voir (Figure 1.4).

Remarque générale : les résultats de simulation obtenus et présentés dans l'ensemble de ce document ont été réalisés sur un ordinateur portable dont la configuration est la suivante :

Configuration PC

CPU : Intel® Core™ i7-3520M CPU @ 2.90GHz ; RAM : 8.00 Go ; OS : Windows 7 (64 bits)

Version de Matlab

R2009b

Version de Comsol

Comsol 3.5

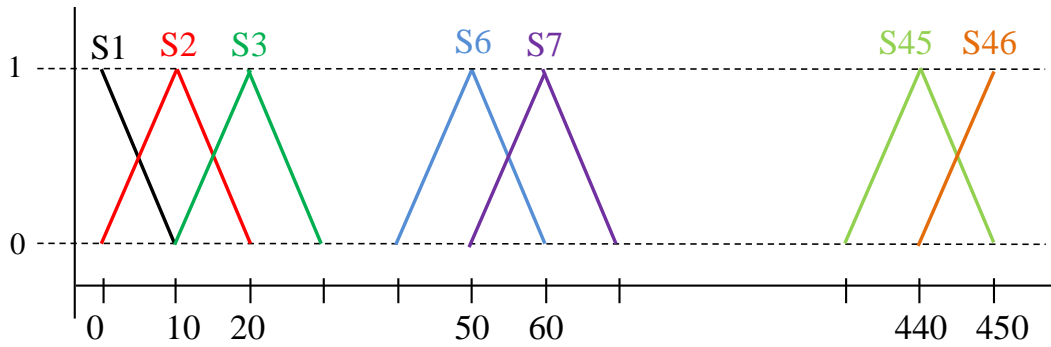


Figure 1.4. Exemple de représentation des fonctions chapeaux.

La conductivité thermique étudiée dans ce cas présent est discrétisée tous les 10 K, sur une plage de 0 à 450 K. Pour une meilleure discrétisation du paramètre recherché ici $\lambda(\theta)$, il suffirait de raffiner le pas d'estimation et donc d'augmenter la taille du vecteur $\bar{\lambda}$.

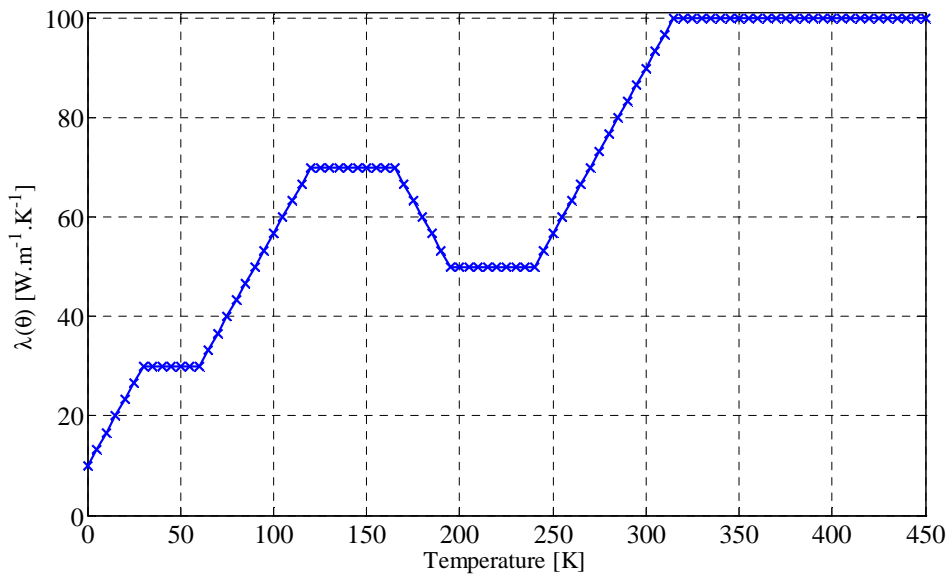


Figure 1.5. Conductivité thermique en fonction de la température.

Considérant le système d'équations (1.10) les paramètres donnés dans le Tableau 1.1 et la conductivité thermique définie en Figure 1.5, le problème direct peut ainsi être résolu numériquement à l'aide des solveurs basés sur la résolution par éléments finis (Comsol ® interfacé avec Matlab®).

Supposons que la conductivité thermique $\lambda(\theta)$ est inconnue, le problème inverse consiste à identifier cette fonction considérant des observations de l'évolution du système.

Dans ce qui suit, N_c capteurs sont considérés : l'emplacement du capteur i est dénoté par x_i et la température mesurée correspondante est $\hat{\theta}_i(t)$.

Afin de tester la méthode, les solutions numériques du problème direct (obtenues avec la conductivité thermique exacte) sont considérées comme des "mesures". Un bruit gaussien $\mathcal{N}^\circ(0,1)$ est ajouté à la solution afin de vérifier l'effet de régularisation de la MGC.

Sur la figure suivante, six capteurs sont disposés de la manière suivante $x_i = 0.02(i-1)$ et les « mesures » (solutions exactes bruitées) sont représentées (Figure 1.6).

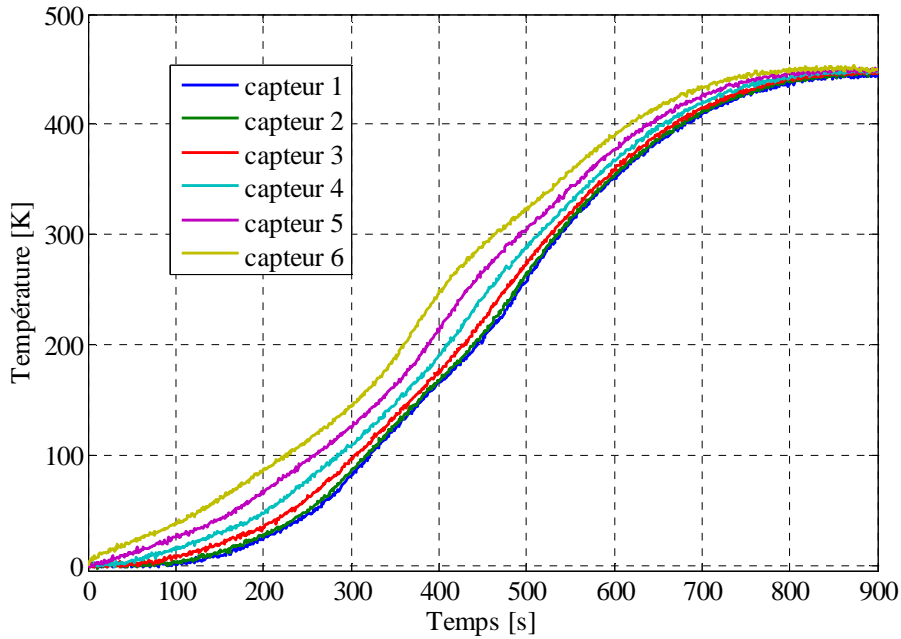


Figure 1.6. Evolution de la température solution du problème direct.

2.2. Implémentation de la Méthode du Gradient Conjugué Hors Ligne (MGC-HL).

Comme précédemment indiqué, la conductivité thermique $\lambda(\theta)$ est supposée inconnue et une procédure d'identification doit être mise en œuvre pour l'estimer. Dans cette section, la méthode du gradient conjugué (MGC) est utilisée pour l'identification de $\lambda(\theta)$. Les différentes étapes de la méthode sont expliquées ci-dessous.

2.2.1. Le problème inverse.

Le problème inverse associé peut être résolu en minimisant le critère quadratique suivant :

$$J(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} \left(\theta(x_i, t; \lambda) - \hat{\theta}_i(x_i, t) \right)^2 dt \right) \quad (1.11)$$

Avec $\theta(x_i, t; \lambda)$ la température simulée à l'emplacement du capteur x_i avec la valeur de $\lambda(\theta)$ et $\hat{\theta}_i(x_i, t)$ la température mesurée au niveau du capteur x_i . L'algorithme de minimisation basé sur la méthode du gradient conjugué requiert la résolution itérative de trois problèmes bien posés au sens d'Hadamard (Hadamard, 1932).

- ✓ Un problème direct (1.10) dans le but de calculer le critère de la fonctionnelle à minimiser $J(\lambda^k)$ à l'itération k .
- ✓ Un problème adjoint (1.20) permettant de déterminer le gradient du critère et ainsi pouvoir définir la prochaine direction de descente.
- ✓ Un problème de sensibilité (1.15) permettant de calculer la profondeur de descente dans la direction de descente.

Les différentes étapes introduisant ces deux problèmes sont détaillées ci-après.

Présentation de l'algorithme du gradient conjugué Hors Ligne

Soit la fonctionnelle $J(\lambda)$ à minimiser avec $J(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} \left(\theta(x_i, t; \lambda) - \hat{\theta}_i(x_i, t) \right)^2 dt \right)$.

Algorithme

Etape 1 : initialisation

- Initialisation $k=1$.
- Choisir un vecteur d'état initial $\lambda(\theta)_{k=1}$

Etape 2 : mise en place de l'algorithme itératif

Tant que

- Résolution du problème direct
 - Récupération des mesures simulées aux positions des capteurs $\theta(x_i, t; \lambda)$.
 - Calcul du critère $J(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} (\theta(x_i, t; \lambda) - \hat{\theta}_i(x_i, t))^2 dt \right)$
 - Si $J(\lambda) < J_{stop}$ OU $k < Max_iter$ (nombre maximal d'itérations)

FIN DE L'ALGORITHME

- Résolution du problème adjoint
 - Calcul du gradient de la fonctionnelle $\nabla J(\lambda)_k$
 - Calcul de la nouvelle direction de descente

Si $k=1$

$$d_k = -\nabla J(\lambda)_k$$

Sinon

$$d_k = -\nabla J(\lambda)_k + \frac{\|\nabla J(\lambda)_k\|}{\|\nabla J(\lambda)_{k-1}\|} d_{k-1} \quad \text{où } \|\cdot\| \text{ est la norme Euclidienne}$$

Fin si

- Résolution du problème de sensibilité
 - Calcul de la profondeur de descente dans la direction de descente

$$\gamma^k = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathcal{T}} (\theta(x_i, t; \lambda^k) - \hat{\theta}_i(x_i, t)) \delta \theta(x_i, t; \lambda^k) dt}{\sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathcal{T}} (\delta \theta(x_i, t; \lambda^k))^2 dt}$$

- Calcul du nouvel itéré de $\lambda(\theta)_k$: $\lambda(\theta)_{k+1} = \lambda(\theta)_k - \gamma^k d_k$

Itération de l'algorithme $k = k+1$

2.2.2. Le problème de sensibilité

Posons $\delta\theta(x;t)$ la variation de température induite par une variation de la conductivité thermique notée : $\lambda^+(\theta(x;t)) = \lambda(\theta(x;t)) + \varepsilon\delta\lambda(\theta(x;t))$ où $\delta\lambda(\theta(x;t)) = \sum_{i=1}^{N_\lambda} (\delta\lambda_i) s_i(\theta)$ avec $N_\lambda = 46$. Cette variation de la conductivité thermique engendre une nouvelle température notée $\theta^+(x;t) = \theta(x;t; \lambda^+(\theta(x;t)))$, solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta^+(x;t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^+(\theta^+(x;t)) \frac{\partial \theta^+(x;t)}{\partial x} \right) = 0 & \forall (x,t) \in \Omega \times \mathcal{T} \\ \theta^+(x,0) = 0 & \forall x \in \Omega \\ -\lambda^+(\theta^+(x;t)) \frac{\partial \theta^+(x;t)}{\partial \bar{n}} = h\theta^+(x;t) - \phi(t) & \forall (x,t) \in \{0,L\} \times \mathcal{T} \end{cases} \quad (1.12)$$

La fonction de sensibilité donnée par $\delta\theta(x;t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\theta^+(x;t) - \theta(x;t)}{\varepsilon}$ permet d'écrire

$$\theta^+(x;t) - \theta(x;t) = \varepsilon \delta\theta(x;t) \text{ (avec } \varepsilon \text{ qui tend vers 0).}$$

De plus la variation de la conductivité par rapport à la température peut s'écrire :

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(\theta(x;t) + \varepsilon \delta\theta(x;t)) - \lambda(\theta(x;t))}{\varepsilon \delta\theta(x;t)}$$

Ainsi lorsque ε tend vers 0 cette relation devient :

$$\lambda(\theta^+(x;t)) = \lambda(\theta(x;t)) + \varepsilon \delta\theta(x;t) \lambda'(\theta(x;t))$$

Considérant l'équation volumique (1.12), il vient :

$$\begin{aligned}
 \rho c \frac{\partial \theta^+}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^+ (\theta^+ (.)) \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \right) &= 0 \\
 \rho c \frac{\partial \theta^+}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\lambda (\theta^+ (.)) + \varepsilon \delta \lambda (\theta^+ (.)) \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} \right) \right) &= 0 \\
 \rho c \frac{\partial \theta^+}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\lambda (\theta (.)) + \varepsilon \delta \lambda' (\theta (.)) + \varepsilon \delta \lambda (\theta^+ (.)) \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} \right) \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Or, $\varepsilon \delta \lambda (\theta^+ (x; t)) = \varepsilon \left(\delta \lambda (\theta (x; t)) + \varepsilon \delta \theta (x; t) \frac{d \delta \lambda (\theta (x; t))}{d \theta (x; t)} \right)$ et comme ε tend vers 0, les

termes en ε^2 peuvent être négligés :

$$\rho c \frac{\partial \theta^+}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda (\theta (.)) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \varepsilon \delta \theta (.) \lambda' (\theta (.)) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \varepsilon \lambda (\theta (.)) \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \varepsilon \delta \lambda (\theta (.)) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$$

Par comparaison avec l'équation volumique (1.10) du système non varié, il vient :

$$\rho c \frac{\partial (\theta^+ (.) - \theta (.))}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \lambda (\theta (.)) \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \varepsilon \delta \theta \lambda' (\theta (.)) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \varepsilon \delta \lambda (\theta (.)) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \lambda (\theta (.)) \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \varepsilon \delta \theta \lambda' (\theta (.)) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \varepsilon \lambda (\theta (.)) \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \varepsilon \delta \theta \frac{\partial \lambda (\theta (.))}{\partial x} \\
 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\lambda (\theta (.)) \delta \theta (.))
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\rho c \frac{\partial (\theta^+ - \theta)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\lambda (\theta) \delta \theta) + \varepsilon \delta \lambda (\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$ et en divisant par ε on obtient

finalemt l'équation volumique suivante :

$$\rho c \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda (\theta (.)) \delta \theta (.)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \lambda (\theta (.)) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \tag{1.14}$$

Pour les conditions aux limites :

$$-\lambda^+ (\theta^+ (x; t)) \frac{\partial \theta^+ (x; t)}{\partial \vec{n}} + \lambda (\theta (x; t)) \frac{\partial \theta (x; t)}{\partial \vec{n}} = h (\theta^+ (x; t) - \theta (x; t))$$

$$-\left(\left(\lambda(\theta(.)) + \varepsilon \delta\theta(.) \lambda'(\theta(.)) + \varepsilon \delta\lambda(\theta^+ (.)) \right) \left(\frac{\partial\theta(.)}{\partial\bar{n}} + \varepsilon \frac{\partial\delta\theta(.)}{\partial\bar{n}} \right) \right) + \lambda(\theta(.)) \frac{\partial\theta(.)}{\partial\bar{n}} = h(\theta^+ (.)) - \theta(.))$$

En divisant par ε , il vient :

$$-\lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial\delta\theta(x;t)}{\partial\bar{n}} - \delta\theta(x;t) \lambda'(\theta(x;t)) \frac{\partial\theta(x;t)}{\partial\bar{n}} - \delta\lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial\theta(x;t)}{\partial\bar{n}} = h\delta\theta(x;t)$$

$$-\left(\lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial\delta\theta(x;t)}{\partial\bar{n}} - \delta\theta(x;t) \lambda'(\theta(x;t)) \frac{\partial\theta(x;t)}{\partial\bar{n}} \right) = h\delta\theta(x;t) + \delta\lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial\theta(x;t)}{\partial\bar{n}}$$

Finalement :

$$-\frac{\partial}{\partial\bar{n}} \left(\lambda(\theta(x;t)) \delta\theta(x;t) \right) = h\delta\theta(x;t) + \delta\lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial\theta(x;t)}{\partial\bar{n}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{n}} \left(\lambda(\theta) \delta\theta \right) = -h\delta\theta - \delta\lambda(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial\bar{n}}$$

Le problème de sensibilité peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial\delta\theta(x;t)}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\lambda(\theta(x;t)) \delta\theta(x;t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta\lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial\theta(x;t)}{\partial x} \right) & \forall (x,t) \in \Omega \times \mathcal{T} \\ \delta\theta(x,0) = 0 & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\bar{n}} \left(\lambda(\theta(x;t)) \delta\theta(x;t) \right) = -h\delta\theta(x;t) - \delta\lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial\theta(x;t)}{\partial\bar{n}} & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathcal{T} \end{cases} \quad (1.15)$$

La solution $\delta\theta(x;t)$ du problème de sensibilité (1.15) permet de calculer la profondeur de descente γ^k pour chaque itération.

La profondeur de descente :

La profondeur de descente γ^k permet de calculer le pas optimal (dans la direction de descente) de la prochaine valeur du paramètre inconnu : $\lambda(\theta)_{k+1} = \lambda(\theta)_k - \gamma^{k+1} d_{k+1}$.

Cette valeur γ^{k+1} minimise le critère quadratique $J(\bar{\lambda}_k - \gamma \bar{d}_{k+1})$:

$$J(\bar{\lambda}_k - \gamma \vec{d}_{k+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} \left(\theta(x_i, t; \bar{\lambda}_k - \gamma \vec{d}_{k+1}) - \hat{\theta}_i(x_i, t) \right)^2 dt \right) \quad (1.16)$$

De plus, l'expression de $\theta(x_i, t; \bar{\lambda}_k - \gamma \vec{d}_{k+1})$ peut se formuler de la manière suivante :

$$\theta(x_i, t; \bar{\lambda}_k - \gamma \vec{d}_{k+1}) \approx \theta(x_i, t; \bar{\lambda}_k) - \gamma \delta\theta_{k+1}(x_i, t; \bar{\lambda}_k)$$

Où $\delta\theta_{k+1}(x_i, t; \bar{\lambda}_k)$ est la variation de température induite par la variation du flux dans la direction de descente \vec{d}_{k+1} .

Finalement il est possible d'écrire (1.11) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} J(\bar{\lambda}_k - \gamma \vec{d}_{k+1}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} \left(\theta(x_i, t; \bar{\lambda}_k) - \gamma \delta\theta_{k+1}(x_i, t; \bar{\lambda}_k) - \hat{\theta}_i(x_i, t) \right)^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} \left(\theta(x_i, t; \bar{\lambda}_k) - \hat{\theta}_i(x_i, t) \right)^2 dt \right) - \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} \left(\theta(x_i, t; \bar{\lambda}_k) - \hat{\theta}_i(x_i, t) \right) \delta\theta_{k+1}(x_i, t; \bar{\lambda}_k) dt \right) \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} \left(\delta\theta_{k+1}(x_i, t; \bar{\lambda}_k) \right)^2 dt \right) \end{aligned}$$

La valeur de γ minimisant $J(\bar{\lambda}_k - \gamma \vec{d}_{k+1})$ vérifie ainsi : $\frac{\partial J(\bar{\lambda}_k - \gamma \vec{d}_{k+1})}{\partial \gamma} = 0$, ce qui est équivalent à :

$$-\sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} \left(\theta(x_i, t; \bar{\lambda}_k) - \hat{\theta}_i(x_i, t) \right) \delta\theta_{k+1}(x_i, t; \bar{\lambda}_k) dt \right) + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \left(\int_{\mathcal{T}} \left(\delta\theta_{k+1}(x_i, t; \bar{\lambda}_k) \right)^2 dt \right) = 0$$

De cette condition, l'expression de la profondeur de descente du gradient conjugué s'exprime comme :

$$\gamma^k = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathcal{T}} \left(\theta(x_i, t; \lambda^k) - \hat{\theta}_i(x_i, t) \right) \delta\theta(x_i, t; \lambda^k) dt}{\sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathcal{T}} \left(\delta\theta(x_i, t; \lambda^k) \right)^2 dt} \quad (1.17)$$

2.2.3. Le problème adjoint

Afin de calculer le gradient de la fonctionnelle $\overrightarrow{\nabla J(\lambda^k)} = \left\{ \frac{\partial J}{\partial \lambda_i^k} \right\}_{i=1, \dots, N_\lambda}$ à chaque itération k

de l'algorithme de minimisation, une formulation Lagrangienne $\ell(\lambda(\theta), \theta, \psi)$ est introduite :

$$\ell(\lambda, \theta, \psi) = J(\theta, \lambda) + \iint_{\Omega \times \mathbb{T}} \left[\rho c \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial x} \right) \right] \psi(x, t) dt dx \quad (1.18)$$

La variation $\delta \ell(\lambda(\theta), \theta, \psi(x; t))$ peut être formulée de la manière suivante :

$$\delta \ell(\lambda(\theta), \theta, \psi(x; t)) = \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \ell}{\partial \lambda(\theta)} \delta \lambda(\theta) + \frac{\partial \ell}{\partial \psi} \delta \psi$$

Si $\psi(x, t)$ est fixé, alors $\frac{\partial \ell}{\partial \psi(x, t)} \delta \psi(x, t) = 0$ et donc :

$$\delta \ell(\lambda(\theta), \theta, \psi(x; t)) = \frac{\partial \ell}{\partial \theta(x; t)} \delta \theta(x; t) + \frac{\partial \ell}{\partial \lambda(\theta(x; t))} \delta \lambda(\theta(x; t))$$

Le multiplicateur de Lagrange $\psi(x, t)$ est choisi pour que $\frac{\partial \ell}{\partial \theta(x; t)} \delta \theta(x; t) = 0$ soit satisfaite

et par conséquent :

$$\delta \ell(\lambda(\theta), \theta, \psi(x; t)) = \frac{\partial \ell}{\partial \lambda(\theta(x; t))} \delta \lambda(\theta(x; t))$$

De plus si $\theta(x, t)$ est solution du problème direct (1.10) alors :

$$\begin{aligned} \delta \ell(\lambda(\theta), \theta, \psi(x; t)) &= \frac{\partial \ell}{\partial \lambda(\theta(x; t))} \delta \lambda(\theta(x; t)) = \delta J(\theta, \lambda) \\ \delta \ell(\lambda(\theta), \theta, \psi) &= \int_0^{tf} \int_0^L \left(\theta(x_c; t) - \hat{\theta}(x_c; t) \right) \delta \theta(x; t) \delta_D(x - x_c) dx dt \\ &\quad + \int_0^{tf} \int_0^L \left[\rho c \frac{\partial \delta \theta(x; t)}{\partial t} \right] \psi(x; t) dx dt \\ &\quad - \int_0^{tf} \int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t)) \right] \psi(x; t) dx dt \\ &\quad - \int_0^{tf} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \lambda(\theta(x; t)) \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial x} \right) \right] \psi(x; t) dx dt \end{aligned} \quad (1.19)$$

Où $\delta_D(x - x_c)$ est la distribution de Dirac associée à l'emplacement du capteur $C_i(x, y)$.

Soient les trois intégrales I_1 , I_2 et I_3 définies de la manière suivante :

$$I_1 = \int_0^{tf} \int_0^L \left[\rho c \frac{\partial \delta \theta(x; t)}{\partial t} \right] \psi(x; t) dx dt \quad I_2 = \int_0^{tf} \int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t)) \right] \psi(x; t) dx dt$$

$$I_3 = \int_0^{tf} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \lambda(\theta(x; t)) \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial x} \right) \right] \psi(x; t) dx dt$$

En intégrant par parties I_1 :

$$I_1 = \int_0^L \left[\rho c \delta \theta(x; t) \psi(x; t) \right]_0^{tf} dx - \rho c \int_0^L \int_0^{tf} \left(\delta \theta(x; t) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial t} \right) dt dx$$

$$I_1 = \int_0^L \rho c \delta \theta(x; tf) \psi(x; tf) dx - \int_0^L \rho c \delta \theta(x; 0) \psi(x; 0) dx - \rho c \int_0^L \int_0^{tf} \left(\delta \theta(x; t) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial t} \right) dt dx$$

En réalisant deux intégrations par parties sur I_2 :

$$I_2 = \int_0^{tf} \left[\frac{\partial (\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t))}{\partial x} \psi(x; t) \right]_0^L dt - \int_0^{tf} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} (\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t)) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial x} \right] dx dt$$

$$I_2 = \int_0^{tf} \left[\frac{\partial (\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t))}{\partial x} \psi(x; t) \right]_0^L dt - \int_0^{tf} \left[\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial x} \right]_0^L dt$$

$$+ \int_0^{tf} \int_0^L \left[\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t) \frac{\partial^2 \psi(x; t)}{\partial^2 x} \right] dx dt$$

Finalement :

$$I_2 = \int_0^{tf} \frac{\partial (\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t))}{\partial x} \Big|_L \psi(L; t) dt - \int_0^{tf} \frac{\partial (\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t))}{\partial x} \Big|_0 \psi(0; t) dt$$

$$- \int_0^{tf} \lambda(\theta(L; t)) \delta \theta(L; t) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial x} \Big|_L dt + \int_0^{tf} \lambda(\theta(0; t)) \delta \theta(0; t) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial x} \Big|_0 dt$$

$$+ \int_0^{tf} \int_0^L \left[\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t) \frac{\partial^2 \psi(x; t)}{\partial^2 x} \right] dx dt$$

En réalisant deux intégrations par parties sur I_3 :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^{tf} \left[\delta \lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \psi(x;t) \right]_0^L dt - \int_0^{tf} \int_0^L \left[\delta \lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x;t)}{\partial x} \right] dx dt \\
 I_3 &= \int_0^{tf} \delta \lambda(\theta(L;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \Big|_L \psi(L;t) dt - \int_0^{tf} \delta \lambda(\theta(0;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \Big|_0 \psi(0;t) dt \\
 &\quad - \int_0^{tf} \int_0^L \left[\delta \lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x;t)}{\partial x} \right] dx dt
 \end{aligned}$$

En réécrivant I_1, I_2 et I_3 en prenant en compte les équations du problème de sensibilité, on

obtient : $I_1 = \int_0^L \rho c \delta \theta(x;tf) \psi(x;tf) dx - \rho c \int_0^L \int_0^{tf} \left(\delta \theta(x,t) \frac{\partial \psi(x;t)}{\partial t} \right) dt dx$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{tf} \left(-h \delta \theta(L;t) \psi(L;t) - \delta \lambda(\theta(L;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \Big|_L \psi(L;t) \right) dt \\
 &\quad - \int_0^{tf} \left(h \delta \theta(0;t) \psi(0;t) - \delta \lambda(\theta(0;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \Big|_0 \psi(0;t) \right) dt \\
 &\quad - \int_0^{tf} \lambda(\theta(L;t)) \delta \theta(L;t) \frac{\partial \psi(x;t)}{\partial x} \Big|_L dt + \int_0^{tf} \lambda(\theta(0;t)) \delta \theta(0;t) \frac{\partial \psi(x;t)}{\partial x} \Big|_0 dt \\
 &\quad + \int_0^{tf} \int_0^L \left[\lambda(\theta(x;t)) \delta \theta(x;t) \frac{\partial^2 \psi(x;t)}{\partial^2 x} \right] dx dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^{tf} \delta \lambda(\theta(L;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \Big|_L \psi(L;t) dt - \int_0^{tf} \delta \lambda(\theta(0;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \Big|_0 \psi(0;t) dt \\
 &\quad - \int_0^{tf} \int_0^L \left[\delta \lambda(\theta(x;t)) \frac{\partial \theta(x;t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x;t)}{\partial x} \right] dx dt
 \end{aligned}$$

Finalement en injectant I_1, I_2 et I_3 dans l'équation caractérisant $\delta \ell(\lambda(\theta), \theta, \psi)$ (1.19) il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \delta \ell(\lambda(\theta), \theta, \psi) = & \int_0^{tf} \int_0^L E(x; t) \delta \theta(x; t) dx dt + \int_0^L \rho c \delta \theta(x; tf) \psi(x; tf) dx \\
 & - \rho c \int_0^L \int_0^{tf} \left(\delta \theta(x; t) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial t} \right) dt dx \\
 & - \int_0^{tf} \left(-h \delta \theta(L; t) \psi(L; t) - \delta \lambda(\theta(L; t)) \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial x} \Big|_L \psi(L; t) \right) dt \\
 & + \int_0^{tf} \left(h \delta \theta(0; t) \psi(0; t) - \delta \lambda(\theta(0; t)) \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial x} \Big|_0 \psi(0; t) \right) dt \\
 & + \int_0^{tf} \lambda(\theta(L; t)) \delta \theta(L; t) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial x} \Big|_L dt - \int_0^{tf} \lambda(\theta(0; t)) \delta \theta(0; t) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial x} \Big|_0 dt \\
 & - \int_0^{tf} \int_0^L \left[\lambda(\theta(x; t)) \delta \theta(x; t) \frac{\partial^2 \psi(x; t)}{\partial^2 x} \right] dx dt \\
 & - \int_0^{tf} \delta \lambda(\theta(L; t)) \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial x} \Big|_L \psi(L; t) dt + \int_0^{tf} \delta \lambda(\theta(0; t)) \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial x} \Big|_0 \psi(0; t) dt \\
 & + \int_0^{tf} \int_0^L \left[\delta \lambda(\theta(x; t)) \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial x} \right] dx dt
 \end{aligned}$$

Avec $E(x; t) = (\theta(x_c; t) - \hat{\theta}(x_c; t)) \delta_D(x - x_c)$.

Afin que $\frac{\partial \ell(\lambda(\theta), \theta, \psi(x; t))}{\partial \theta(x; t)} \delta \theta(x; t) = 0$, $\forall \delta \theta(x; t)$, il est nécessaire que la fonction

$\psi(x; t)$ soit solution du problème adjoint ci-dessous :

$$\begin{cases} E(x; t) - \rho c \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial t} - \lambda(\theta(x; t)) \Delta \psi(x; t) = 0 & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathcal{T} \\ \psi(x, t_f) = 0 & \forall x \in \Omega \\ -\lambda(\theta(x; t)) \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial \vec{n}} = h \psi(x, t) & \forall (x, t) \in \{0, L\} \times \mathcal{T} \end{cases} \quad (1.20)$$

Finalement lorsque $\psi(x; t)$ est la solution du problème (1.20) alors :

$$\delta l(\theta, \lambda, \psi) = \int_0^{t_f} \int_0^L \delta \lambda(\theta(x; t)) \frac{\partial \theta(x; t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x; t)}{\partial x} dx dt$$

En discrétisant la conductivité thermique dépendante de la température, il devient :

$$\lambda(\theta) = \sum_{i=1}^n s_i(\theta) \lambda_i \Rightarrow \delta \lambda(\theta(x; t)) = \sum_{i=1}^n s_i(\theta) \delta \lambda_i$$

$$\text{Donc : } \delta l(\theta, \lambda, \psi) = \int_0^{t_f} \int_0^L \sum_{i=1}^n s_i(\theta(x, t)) \delta \lambda_i \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx dt = \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i$$

Le gradient s'exprime donc par :

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_i} = \int_0^{t_f} \int_0^L s_i(\theta(x, t)) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx dt \quad (1.21)$$

La direction de descente à l'itération k est obtenue en considérant le gradient de la fonctionnelle à minimiser à l'itération k et $k-1$. Considérant les trois problèmes énoncés précédemment (direct, adjoint et sensibilité), un algorithme de minimisation basé sur la méthode du gradient conjugué peut être implémenté numériquement. Le critère d'arrêt usuellement pris en compte pour de tels problèmes inverses a été introduit par (Alifanov O.M., 1994) dans le cadre d'un bruit gaussien de moyenne nulle. Il peut être défini comme :

$J_{stop} = \frac{1}{2} N_c N_t \sigma^2$, où N_c est le nombre de capteurs, N_t le nombre de mesures et σ l'écart type du bruit. Ce test d'arrêt est aussi appelé « niveau admissible de minimisation ».

2.2.4. Résultats numériques.

Considérons la conductivité thermique initiale ayant pour valeur : $\lambda(\theta) = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad \forall \theta$. En implémentant numériquement la méthode du gradient conjugué à l'aide d'un solveur numérique, l'évolution du critère à minimiser est représentée (Figure 1.7). Six capteurs sont considérés dans cette étude ; ils fournissent des « mesures de température » toutes les secondes.

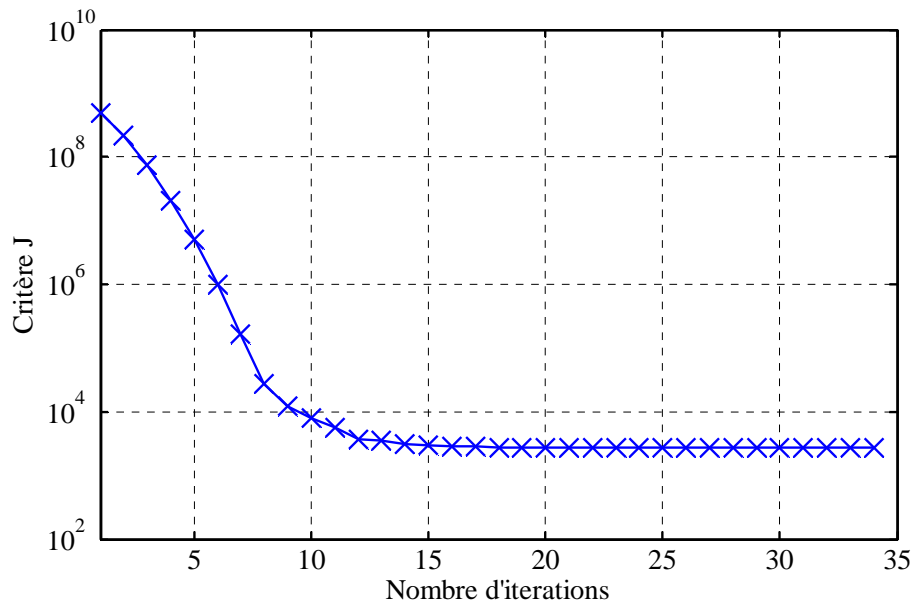


Figure 1.7. Evolution de la fonction coût (MGC-HL).

Dans le tableau 1.2 ci-dessous, plusieurs valeurs de la fonctionnelle à minimiser sont présentées:

Tableau 1.2. Evolution de la fonction coût.

Itération	1	5	10	15	20	25	30	34
$J(\lambda^k)$	$4,92.10^8$	$5,091.10^6$	5751	3113	2754	2718	2707	2702

La conductivité thermique obtenue à la fin du processus d'identification est présentée (Figure 1.8).

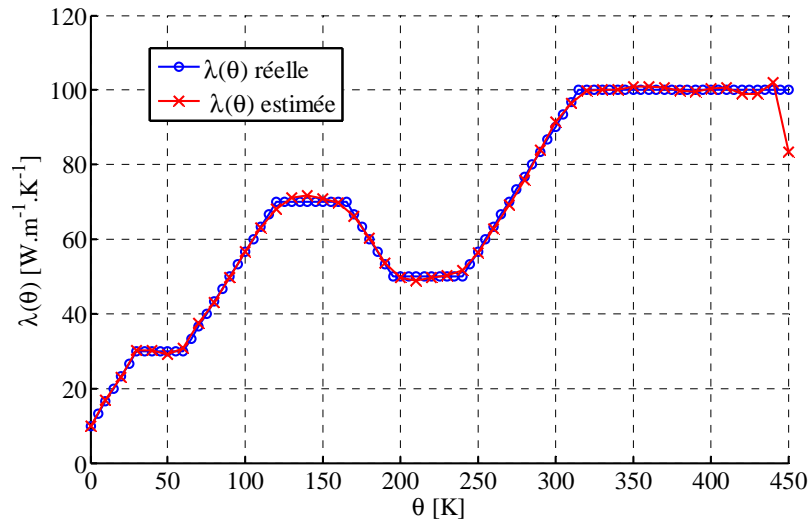
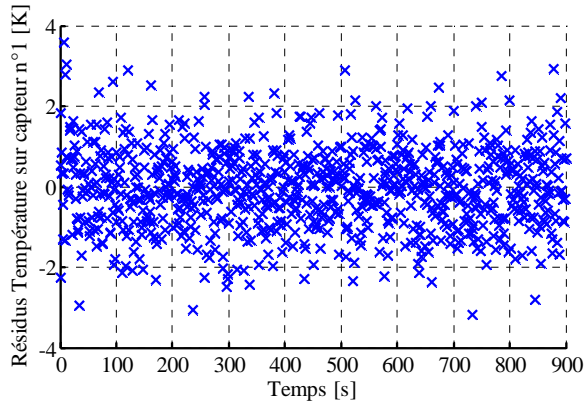
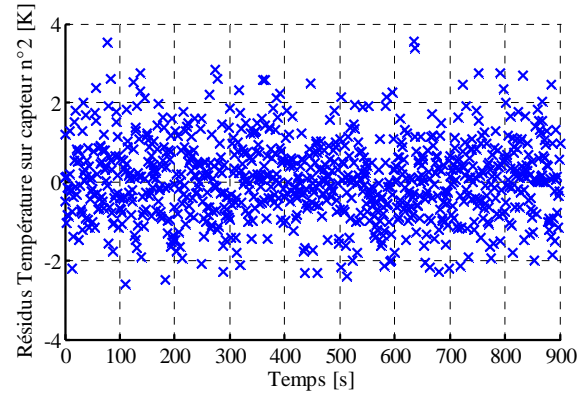


Figure 1.8. Conductivité thermique identifiée (MGC-HL).

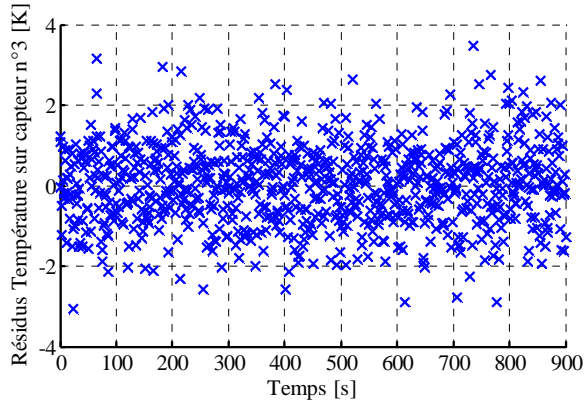
La conductivité thermique pour les hautes températures $\theta = 450\text{ K}$ n'est pas identifiée correctement. La raison de ce problème d'estimation est due aux valeurs de températures mesurées au niveau des capteurs (voir Figure 1.6). En effet, il apparaît que le nombre d'observations de l'ordre de 450 K est relativement faible et sont obtenues en fin d'expérimentations. Dans le but de vérifier le comportement de l'algorithme de minimisation et son efficacité, les résidus entre températures calculées avec la valeur de la conductivité thermique issue de l'algorithme de minimisation et mesures de températures sont présentés (Figure 1.9).



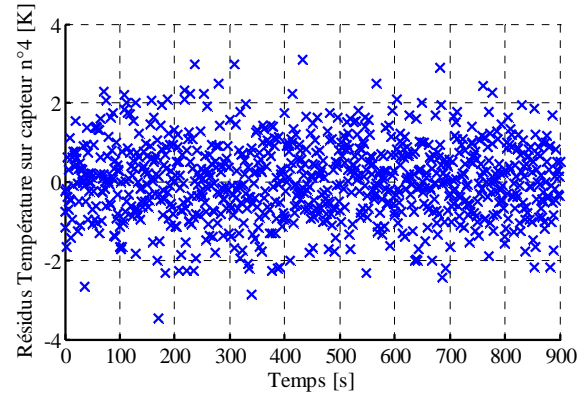
Moyenne Résidus C1= -0.04 K
Ecart type Résidus C1 = 0.99 K



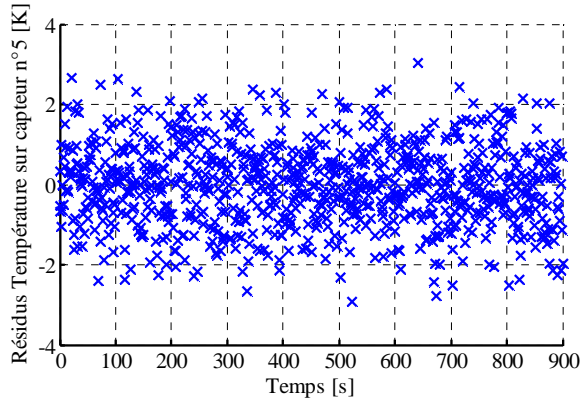
Moyenne Résidus C2= -0.05 K
Ecart type Résidus C2 = 1.0 K



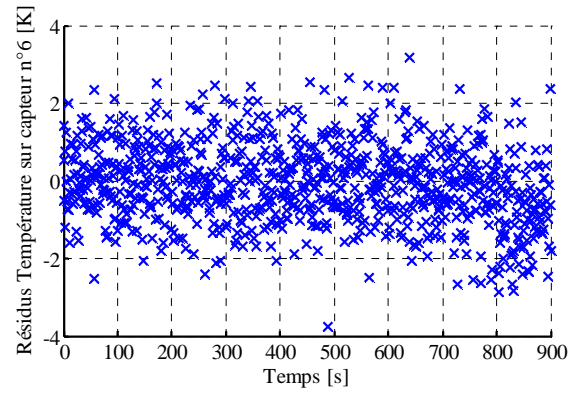
Moyenne Résidus C3 = -0.036 K
Ecart type Résidus C3 = 0.99 K



Moyenne Résidus C4= -0.030 K
Ecart type Résidus C4= 0.98 K



Moyenne Résidus C5= -0.014 K
Ecart type Résidus C5= 1.01 K



Moyenne Résidus C6= -0,064K
Ecart type Résidus C6= 1,01 K

Figure 1.9. Résidus de températures (MGC-HL).

La moyenne des différences de température est de -0.09 K et l'écart type est de 0.97 K. Ce dernier est du même ordre que l'écart type du bruit $\mathcal{N}(0,1)$ considéré. Ces résultats illustrent bien l'efficacité de la MGC pour identifier une conductivité thermique dépendante de la température.

2.3.Implémentation de la Méthode du Gradient Conjugué En Ligne (MGC-EL).

Les résultats précédents mettent en évidence l'efficacité de la méthode du gradient conjugué. Toutefois, la conductivité thermique est identifiée 18 minutes après l'expérimentation (d'une durée de 15 minutes). Les deux principaux inconvénients de cette méthode hors ligne (MGC-HL) sont :

- Un temps de convergence qui peut être très important selon la complexité du problème.
- La nécessité d'attendre la fin de l'expérience avant de pouvoir commencer à identifier la fonction inconnue. Par exemple, dans la configuration présentée dans la section précédente, les « mesures de températures » sont effectuées pendant 15 minutes, puis le programme d'identification (issu des MGC) est lancé. Les résultats sont obtenus après 34 itérations (nécessitant un temps CPU de calcul équivalent à 18 minutes pour un ordinateur personnel standard).

Afin de surmonter cette limitation et d'obtenir plus rapidement une estimation de la conductivité thermique, une adaptation de l'algorithme est proposée dans cette section.

2.3.1. Intervalle de temps glissant pour la MGC.

Dans cette section, plusieurs intervalles de temps (correspondant aux observations prises en compte pour l'identification) sont considérés. Cette méthode repose sur une implémentation de la méthode du gradient conjugué sur un intervalle de temps $\mathcal{I}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+] \subset \mathcal{I}$ afin d'identifier les valeurs de la fonction inconnue $\lambda_{q_i}(\theta)$ sur chaque intervalle de temps. L'estimation est ensuite réalisée immédiatement sur un autre intervalle de mesure en glissant sur l'intervalle de temps des mesures avec un pas de temps $\Delta t_i > 0$. Ainsi, la prochaine identification est réalisée sur l'intervalle de temps $\mathcal{I}_{i+1} = [\tau_i^- + \Delta t_i^-, \tau_i^+ + \Delta t_i^+] = [\tau_{i+1}^-, \tau_{i+1}^+]$

considérant l'initialisation des valeurs du paramètre inconnu qui n'ont pas pu être identifiées sur le précédent intervalle de temps \mathcal{T}_i avec la dernière valeur sur l'intervalle \mathcal{T}_i , $\lambda_{\mathcal{T}_{i+1}}^{k=0}(\theta) = \lambda_{\mathcal{T}_i}(\theta)$. De plus la température initiale (pour la résolution du problème direct) sur l'intervalle \mathcal{T}_{i+1} est initialisée avec : $\theta(x, \tau_{i+1}^-)$.

2.3.2. Stratégie de Décalage Constant (MGC-EL-DC):

Pour cette première stratégie, l'intervalle de temps utilisé pour identifier les valeurs inconnues de la conductivité thermique est toujours égal à 1 minute (soit 60 mesures de températures par capteurs), $\tau_i^+ - \tau_i^- = 60$ s. Un pas de temps prédéfini $\Delta t < \tau_i^+ - \tau_i^-$ est considéré afin d'assurer un chevauchement des fenêtres d'identification glissant sur l'ensemble des mesures de température. Sur cet intervalle, l'identification est effectuée pendant un temps CPU égal à t_i . Lorsque l'estimation des valeurs inconnues de la conductivité est correcte sur cet intervalle, un nouvel intervalle de temps $\mathcal{T}_{i+1} = [\tau_{i+1}^-, \tau_{i+1}^+]$ est immédiatement considéré pour la prochaine identification avec $\tau_{i+1}^+ = \tau_i^+ + \Delta t$ et $\tau_{i+1}^- = \tau_{i+1}^+ - 60$. Les résultats présentés dans les figures suivantes ont été obtenus avec $\Delta t = \frac{\tau_i^+ - \tau_i^-}{2} = 30$ s. L'évolution de $\lambda_{\mathcal{T}_i}(\theta)$ identifiée est présentée pour quelques intervalles de temps Figure 1.10 et Figure 1.11. La conductivité thermique identifiée à $t = 900$ s est présentée Figure 1.12.

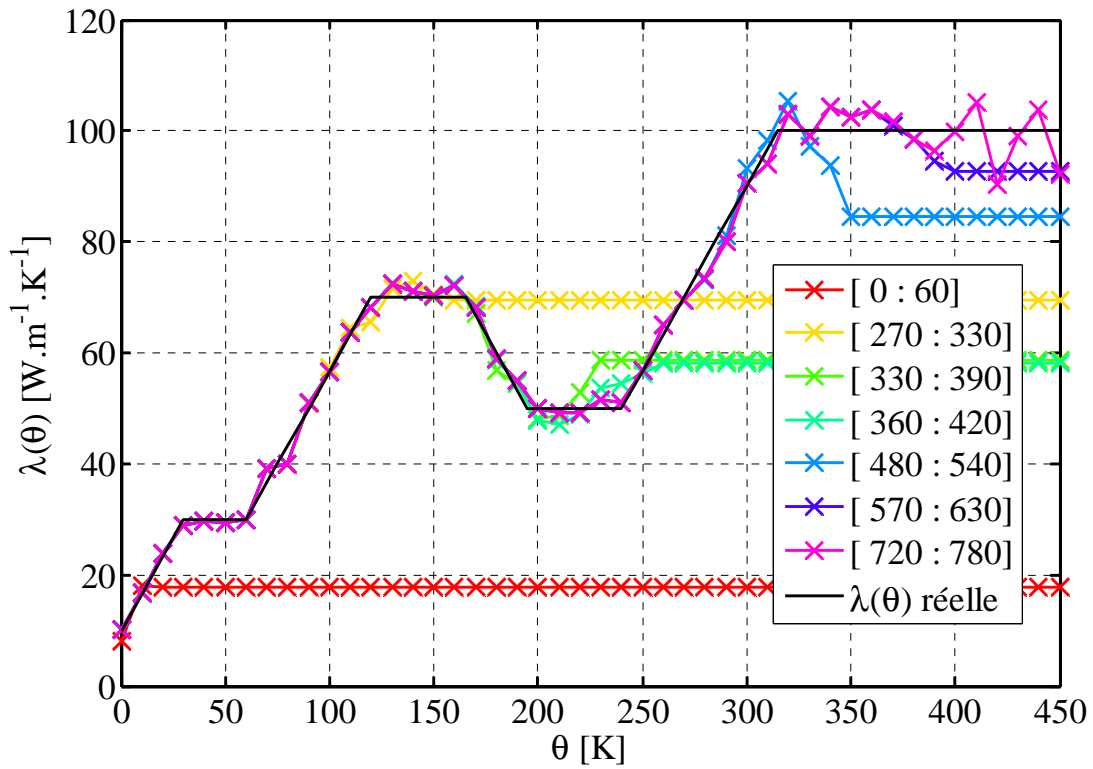


Figure 1.10. Conductivité thermique identifiée pour plusieurs intervalles de temps (MGC-EL-DC).

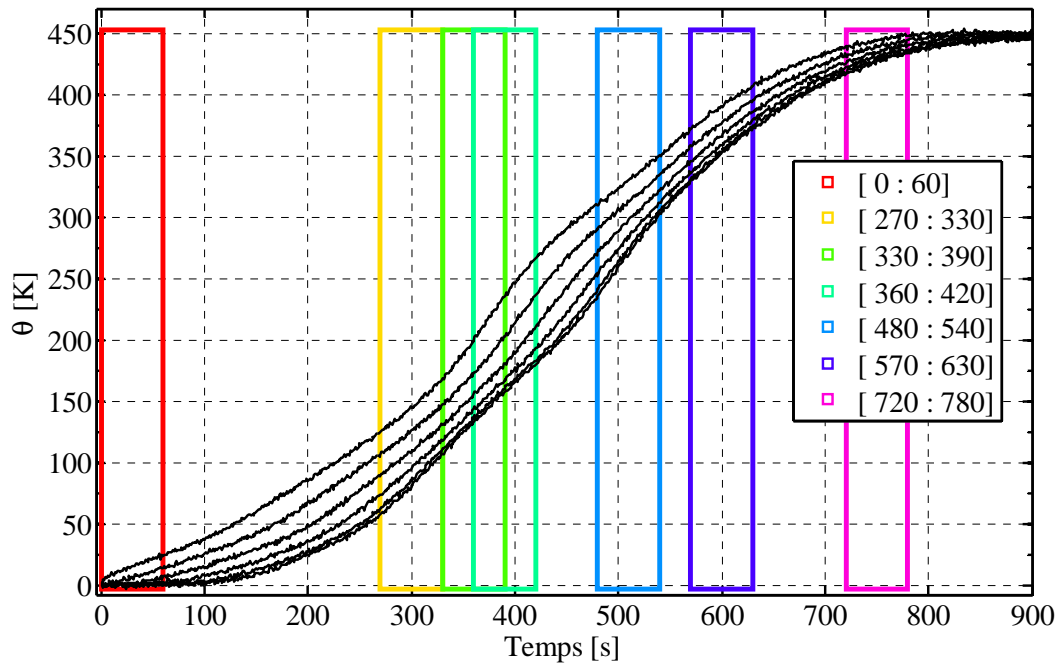


Figure 1.11. Intervalles de temps utilisés associés à la Figure 1.10 (MGC-EL-DC).

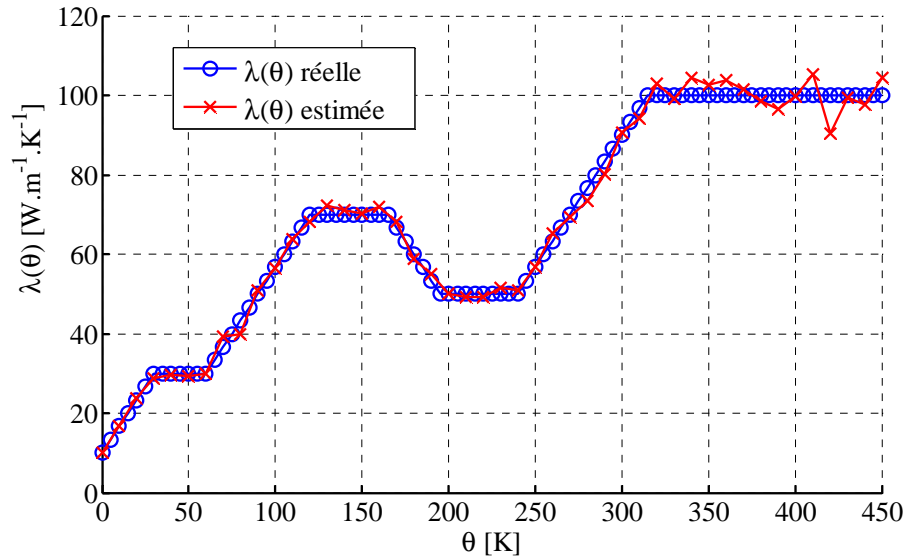


Figure 1.12. Conductivité thermique identifiée à la fin de l'algorithme d'estimation en ligne avec décalage constant (MGC-EL-DC).

La conductivité thermique dépendante de la température présentée (Figure 1.12) est correctement identifiée (à l'exception aux hautes températures telle que mentionnée précédemment). Le glissement des intervalles de temps conduit à une estimation correcte au cours du processus. Les résidus de températures à la fin de l'expérimentation et du processus d'identification de l'ensemble des valeurs inconnues sont portés Figure 1.13. Les retards entre les résultats d'identification et les mesures sont présentés Figure 1.14. Une explication du calcul des retards est fournie en annexe A.

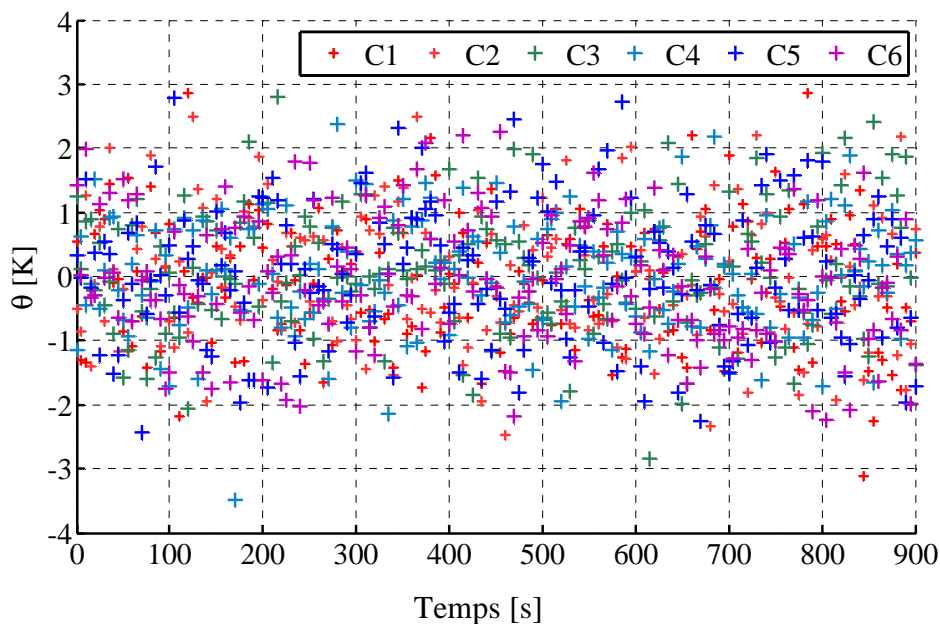


Figure 1.13. Résidus de températures (MGC-EL-DC).

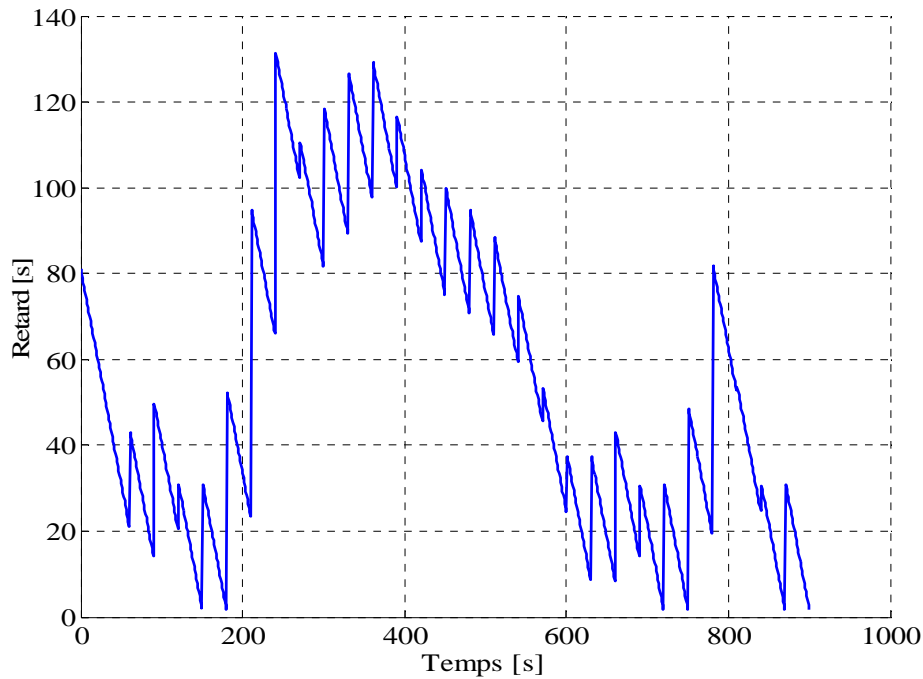


Figure 1.14. Retard entre les résultats d'identification et les mesures (MGC-EL-DC).

La moyenne des résidus de température est de $-0,002$ K et l'écart type est de $1,01$ K. Pour le premier intervalle de temps $\mathcal{T}_1 = [0, 60]$, 4 itérations sont nécessaires pour l'identification de la conductivité thermique. Cela est dû à l'initialisation de l'algorithme $\lambda(\theta) = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ qui est éloignée de la valeur réelle (voir Figure 1.5).

Lorsqu'une seule itération est nécessaire, correspondant à une résolution du problème direct (temps CPU est environ de 3 s) cela signifie que la fonction coût est inférieure au critère d'arrêt. La conductivité thermique identifiée précédente est en adéquation avec les nouvelles mesures. Il n'est alors pas nécessaire de résoudre les problèmes adjoint et de sensibilité.

Le retard moyen est inférieur à 41 s. De plus, il est évident que dès que la conductivité thermique est identifiée avec précision, le retard est constant et correspond au temps CPU requis pour la résolution du problème direct. Pour cette première stratégie 29 intervalles $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+] \subset \mathcal{T}$ sont pris en compte pour l'identification de la conductivité thermique. Le retard final est de 2 secondes soit une estimation de la conductivité thermique disponible seulement deux secondes après l'arrêt de la campagne d'acquisition des mesures aux capteurs.

2.3.3. Stratégie de Décalage Adaptatif (MGC-EL-DA):

Pour cette seconde stratégie, considérons un intervalle de temps $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+] \subset \mathcal{T}$ de 1 minute, $\tau_i^+ - \tau_i^- = 60$ s. Sur cet intervalle, l'identification est effectuée pendant un temps CPU égal à λ_i . Lorsque l'estimation des valeurs inconnues de la conductivité est réalisée sur cet intervalle, un nouvel intervalle de temps $\mathcal{T}_{i+1} = [\tau_{i+1}^-, \tau_{i+1}^+]$ est immédiatement considéré pour la prochaine identification avec $\tau_{i+1}^+ = \tau_i^+ + \lambda_i$ et $\tau_{i+1}^- = \tau_{i+1}^+ - 60$.

Ainsi, le processus d'identification est lancé seulement si de nouvelles mesures ne sont pas en adéquation avec la température prévue (avec la conductivité thermique précédemment identifiée). L'évolution de $\lambda_{\mathcal{T}_i}(\theta)$ identifiée est présentée par rapport à la température et pour plusieurs intervalles de temps en Figure 1.15 et Figure 1.16. La conductivité thermique identifiée à $t = 900$ s est présentée en Figure 1.17.

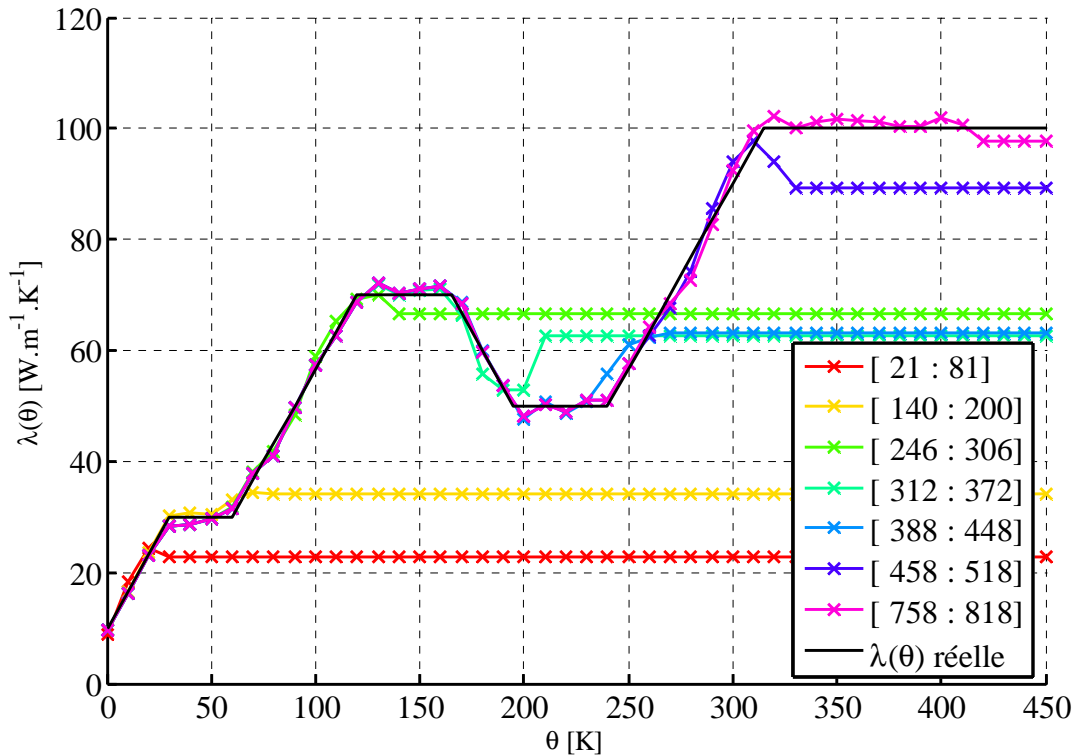


Figure 1.15. Conductivité thermique identifiée pour plusieurs intervalles de temps (MGC-EL-DA).

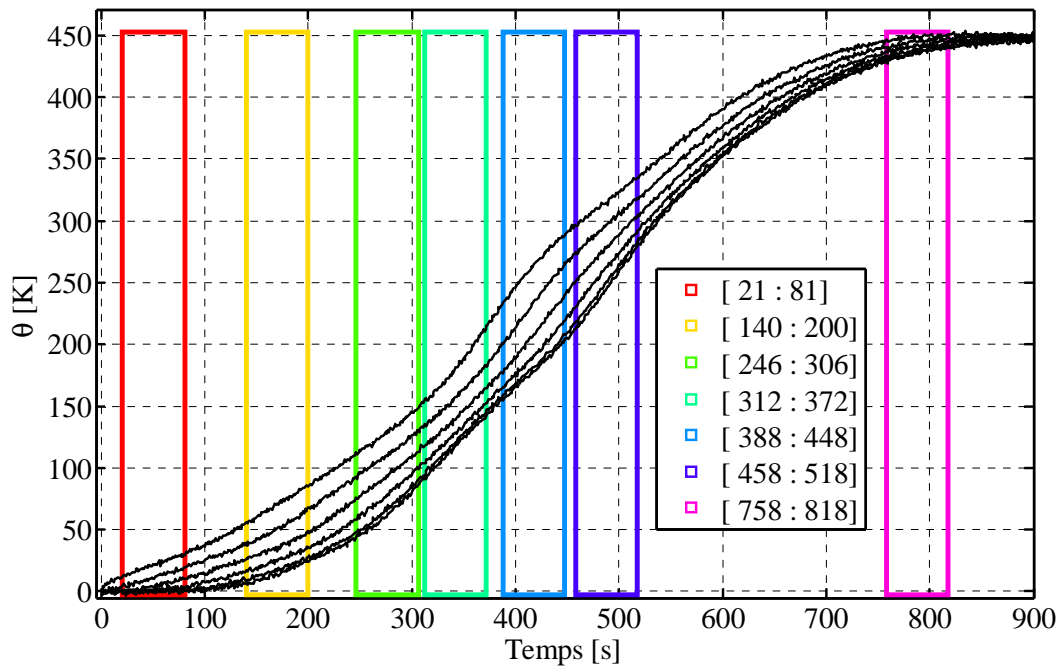


Figure 1.16. Intervalles de temps utilisés associés à la Figure 1.15 (MGC-EL-DA).

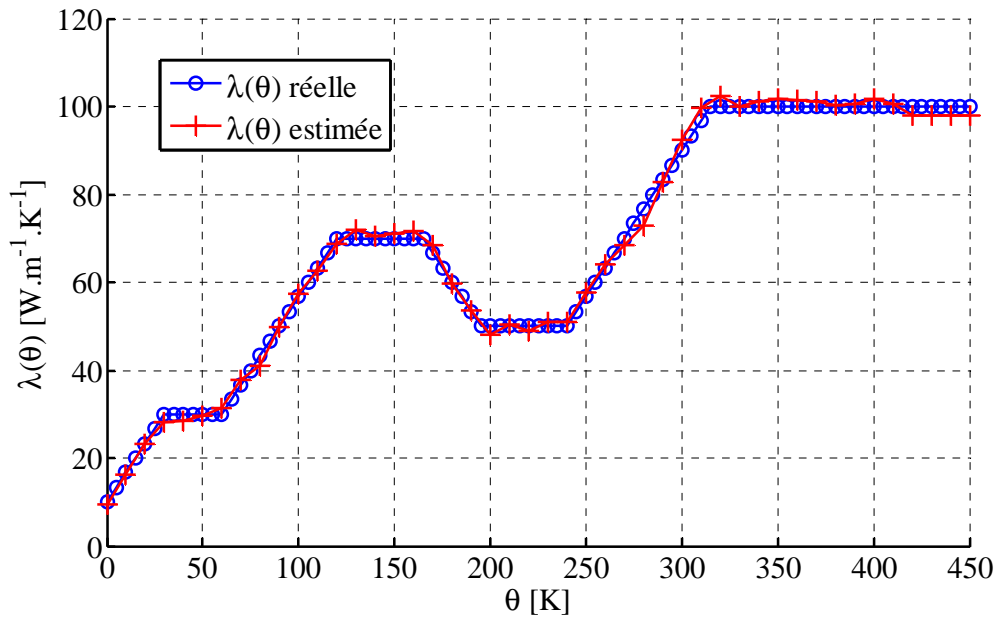


Figure 1.17. Conductivité thermique identifiée à la fin de l'algorithme d'estimation en ligne avec décalage adaptatif (MGC-EL-AC).

La Figure 1.17 et la Figure 1.18 mettent en évidence que la conductivité thermique dépendant de la température est précisément identifiée. Le glissement des intervalles de temps conduit à une estimation correcte au cours du processus.

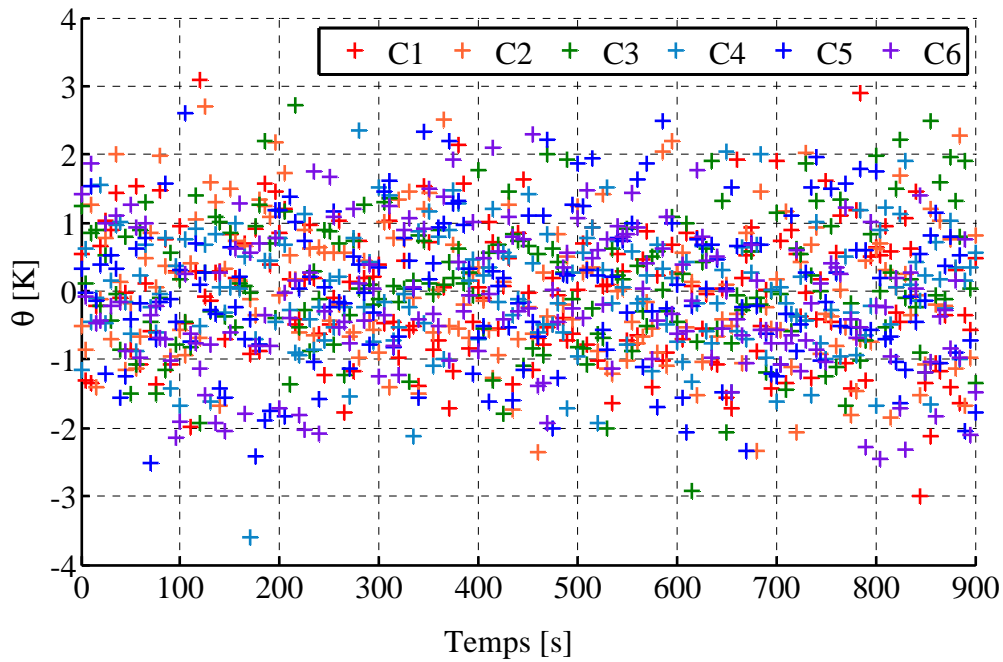


Figure 1.18. Résidus de températures (MGC-EL-DA).

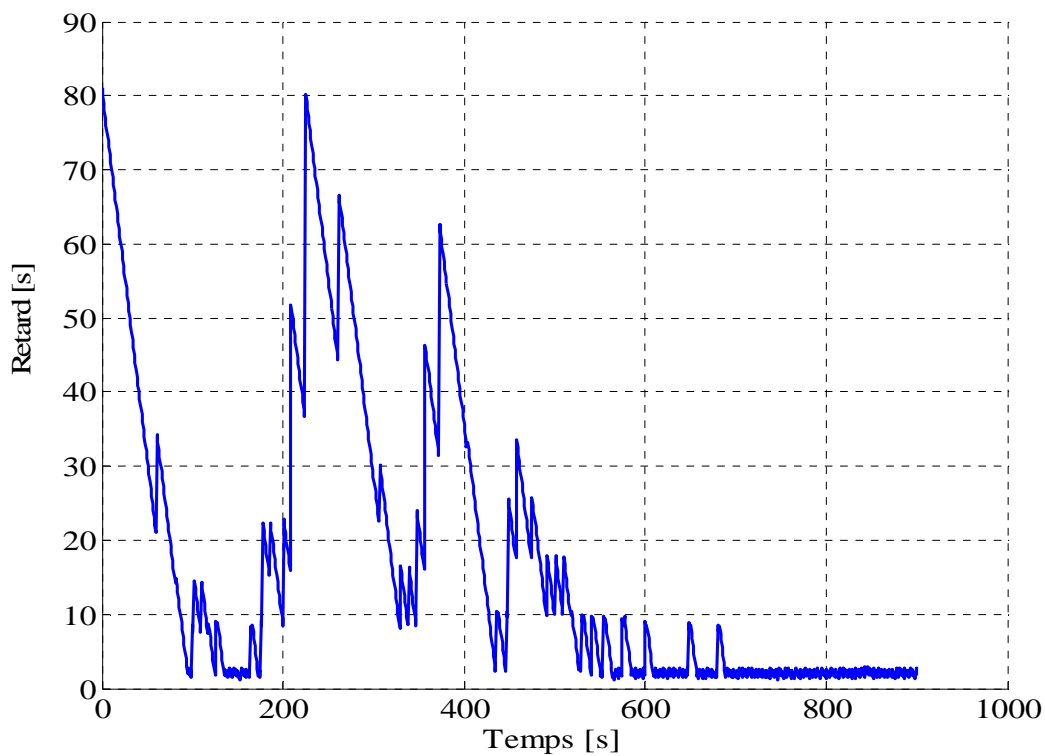


Figure 1.19. Retard entre les résultats d'identification et les mesures (MGC-EL-DA).

Les résidus de températures à la fin de l'expérimentation et du processus d'identification de l'ensemble des valeurs inconnues sont portés Figure 1.18. Les retards entre les résultats

d'identification et les mesures sont portés Figure 1.19. La moyenne des résidus de température est de $-0,012$ K et l'écart type est de $1,009$ K. Dans cette configuration, le retard moyen est environ de $3,5$ s. Lorsque le processus d'identification est lancé uniquement lorsque celui-ci est requis, cela conduit à une identification rapide et satisfaisante. Après 11 minutes, on peut constater que la conductivité thermique est correctement identifiée (retard constant et égal au temps CPU pour une seule résolution de problème direct).

Le retard final est de 2 secondes soit une estimation de la conductivité thermique disponible seulement deux secondes après l'arrêt de la campagne d'acquisition des mesures aux capteurs.

3. Bilan de chapitre

Dans ce premier chapitre, une présentation rapide de quelques techniques de résolution de problèmes inverses a été proposée. Parmi ces méthodes d'estimation deux grandes catégories peuvent être répertoriées. La première catégorie porte sur les méthodes de résolution dites *hors ligne*. Ces méthodes sont appliquées une fois toutes les observations réalisées sur le procédé étudié (la phase d'acquisition de mesure est suivie par la phase d'identification). Ces méthodes se révèlent très robustes et très efficaces, toutefois les temps de calcul peuvent être très longs dans le cas de grandes campagnes de mesure ou de grande complexité du système étudié. La deuxième grande catégorie de ces méthodes d'estimations paramétriques sont les méthodes dites *en ligne*. Ces méthodes offrent l'avantage de permettre une estimation parallèlement à la phase d'acquisition des mesures ce qui peut réduire significativement les temps de calcul. Néanmoins certaines méthodes récursives classiques peuvent se révéler délicates à mettre en œuvre lors de l'étude de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles.

Dans la seconde partie, une adaptation d'une méthode de résolution hors ligne basée sur l'algorithme du gradient conjugué très largement utilisée en génie thermique pour l'étude de système régis par des équations aux dérivées partielles a été proposée. Cette adaptation vise à coupler les avantages des deux grandes catégories de méthodes (hors ligne et en ligne). Le principe est d'utiliser la méthode du gradient conjugué sur un petit intervalle de temps glissant au cours du temps et au fur et à mesure que des nouvelles observations sont réalisées sur le procédé. Compte tenu des résultats présentés, cette méthode prouve son efficacité notamment sur la réduction du temps de calcul tout en permettant de bons résultats sur l'estimation de paramètres inconnus. Dans les chapitres suivants cette adaptation va être présentée et détaillée dans plusieurs contextes (estimation de sources chauffantes en géométrie 2D, estimation de trajectoire, choix et déploiement de capteurs).

Chapitre 2.

Identification quasi en ligne.

Sommaire

1. Identification de densité de flux de sources mobiles chauffantes.....	60
1.1. Présentation du système étudié.....	61
1.2. Problème Inverse.....	65
1.3. Résultats numériques.....	69
1.4. Bilan.....	89
2. Identification du couple flux & trajectoire	90
2.1. Présentation du système d'étude.....	90
2.2. Problème Inverse.....	93
2.3. Résultats numériques.....	95
2.4. Bilan.....	105
3. Bilan du chapitre.....	106

1. Identification de densité de flux de sources mobiles chauffantes

En sciences de l'ingénieur, les processus réels sont fréquemment modélisés afin de prévoir et d'agir sur ces systèmes. Toutefois, certains paramètres sont souvent inconnus compte tenu de la complexité des phénomènes étudiés. Ainsi, une procédure d'identification doit être mise en place pour estimer ces paramètres afin de développer un modèle précis. Dans le contexte de l'identification de paramètres thermiques inconnus, les systèmes sont généralement décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) et plusieurs études peuvent être citées (Alifanov, et al., 1995) et (Isakov, 1998). De nombreuses références liées à l'estimation de paramètres à partir de problèmes inverses sont également présentées dans (Artyukhin, et al., 1984), (Artyukhin, et al., 1993), (Huang & Özişik, 1990), (Carvalho & Silva Neto, 1999), (Tarantola, 2005) et (Aster, et al., 2013). Du point de vue expérimental, de récentes applications en génie thermique sont proposées dans (Zhou, et al., 2010), (Mohammadiun, et al., 2011), (Hasanov & Pektas, 2013), et (Gaspar, et al., 2013).

Dans ce chapitre, une résolution numérique d'un problème inverse thermique dans une géométrie 2D est étudiée. Dans ce contexte, il est habituel d'attendre l'enregistrement de toutes les mesures avant de commencer la procédure d'identification. Toutefois, lorsque l'inversion est réalisée à des fins de contrôle, de diagnostic ou de contre-mesure une identification en ligne peut s'avérer particulièrement intéressante afin de réduire le temps de calcul et de disposer rapidement de données utiles. Ainsi, l'étude présentée ici s'intéresse plus particulièrement à la présentation de l'identification en quasi-temps réel de puissances de deux sources chauffantes mobiles non ponctuelles à partir d'une méthode de régularisation itérative basée sur l'algorithme du gradient conjugué MGC. Cette méthode est très répandue dans le contexte hors ligne et bien connue pour le problème de conduction inverse de chaleur (Jarny, et al., 1991), (Ling, et al., 2006), (Rouquette, et al., 2007), (Beddiaf, et al., 2013) et (Beddiaf, et al., 2014). Afin de décrire le principe de la méthode et de mettre en évidence son attractivité, le problème direct est présenté et le problème inverse mal posé au sens de Hadamard (Hadamard, 1932) est formulé comme un problème de minimisation.

Ensuite, la méthode itérative de régularisation est adaptée afin d'identifier les densités de flux de chaleur inconnue quasi-en ligne. Plusieurs stratégies sont mises en œuvre et comparées (intervalle d'intégration adaptative, fenêtre temporelle glissante, mode prédictif, et choix de la largeur de la fenêtre glissante).

1.1. Présentation du système étudié.

Considérons deux sources mobiles chauffantes S_1, S_2 évoluant sur une plaque métallique fine rectangulaire $\Omega = \left[\frac{-L}{2}, \frac{+L}{2} \right] \times \left[\frac{-l}{2}, \frac{+l}{2} \right] \subset \mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur e .

Considérant que la plaque est fine, les transferts thermiques en son sein peuvent être négligés et un modèle mathématique dans une géométrie 2D est validé (Annexe C) (voir Figure 2.1). Les pertes de chaleur (échanges convectifs) et les flux de chauffe sont formulés dans l'équation de la chaleur (issue du bilan énergétique, considérant la Loi de Fourier). Pour chaque source, considérons que la densité de flux de chaleur $\phi_j (j=1,2)$ est supposée uniforme sur un disque mobile $D_j(I_j, r_j)$ de centre $I_j(x_j, y_j)$ et de rayon r_j .

Le flux total appliqué sur la plaque à chaque instant t peut s'écrire :

$$\Phi(x, y; t) = \begin{cases} \phi_1(t) & \text{si } (x, y) \in D_1(I_1(t), r_1) \\ \phi_2(t) & \text{si } (x, y) \in D_2(I_2(t), r_2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

Le flux total peut aussi être exprimé de manière continue et dérivable tel que :

$$\Phi(x, y; t) = \sum_{j=1}^2 \frac{\phi_j(t)}{\pi} \left(-\arctan(A_j(x, y)) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.2)$$

Avec $A_j(x, y) = \mu \left(\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} - r_j \right)$

Cette distribution spatiale circulaire de la densité de flux de chauffe peut être obtenue à l'aide d'un homogénéisateur optique adéquat. Ce système optique (également appelé kaléidoscope) est couramment utilisé pour obtenir des flux uniformes (Chen, et al., 1963) sur une surface chauffée. Dans (Museux, et al., 2003) ce type d'appareil est utilisé afin d'obtenir un flux uniforme sur un carré pour l'évaluation de brûlures. Cependant, des kaléidoscopes spécifiques peuvent être facilement conçus afin d'obtenir une distribution circulaire du flux radiatif de chauffe.

Le paramètre $\mu \in \mathbb{R}^+$ a été choisi de manière à décrire avec précision la discontinuité des flux de chauffe. L'intervalle de temps $T = [0, t_f]$ peut être divisé en N_t segments $T = \bigcup_{i=0}^{N_t} [t_i, t_{i+1}]$

avec $t_i = \tau i$ et un pas de discrétisation défini par $\tau = \frac{t_f}{N_t + 1}$. Les densités de flux de chauffe

$\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ peuvent être formulées à l'aide de fonctions linéaires continues par morceaux et écrites considérant les fonctions de base $s_i(t)$:

$$s_i(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau} - i + 1 & \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i] \\ -\frac{t}{\tau} + i + 1 & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les deux densités de flux de chauffe sont ainsi exprimées comme :

$\phi_j(t) = \sum_{i=1}^{N_t} \phi_j^i s^i(t) = (\overline{\phi_j})^T \overline{s(t)}$. La distribution spatio-temporelle de température au sein du domaine $\theta(x, y; t)$ est solution du système d'équations aux dérivées partielles (2.3) considérant les paramètres indiqués dans le tableau 2.1.

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y; t) = \frac{\Phi(x, y; t) - 2h(\theta(x, y; t) - \theta_0)}{e} & \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \theta(x, y; 0) = \theta_0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 & \forall (x, y; t) \in \partial \Omega \times [0, t_f] \end{cases} \quad (2.3)$$

Les deux densités de flux des sources mobiles ne suivent pas la même évolution temporelle et sont représentées (Figure 2.2). Les propriétés thermiques du système sont considérées constantes au cours de l'expérience. La résolution numérique réalisée ci-après utilise la méthode des éléments finis du logiciel Comsol[®] interfacé avec Matlab[®].

Tableau 2.1. Paramètres du modèle.

Symbole	Définition	Valeur
ρc	Chaleur volumique	$2.43.10^6 \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$
h	Coefficient de convection naturelle	$10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
t_f	Temps final	600 s
λ	Conductivité thermique	$160 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\phi(t)$	Flux de chaleur	Wm^{-2}
θ_0	Température initiale	291 K
L	Longueur	1 m
l	Largeur	1 m
e	Epaisseur de la plaque	2.10^{-3} m
$r_{j=1,2}$	Rayon de chauffe des sources mobiles	6.10^{-2} m
\vec{n}	Vecteur unitaire (normale externe pointant vers l'extérieur à $\partial\Omega$)	

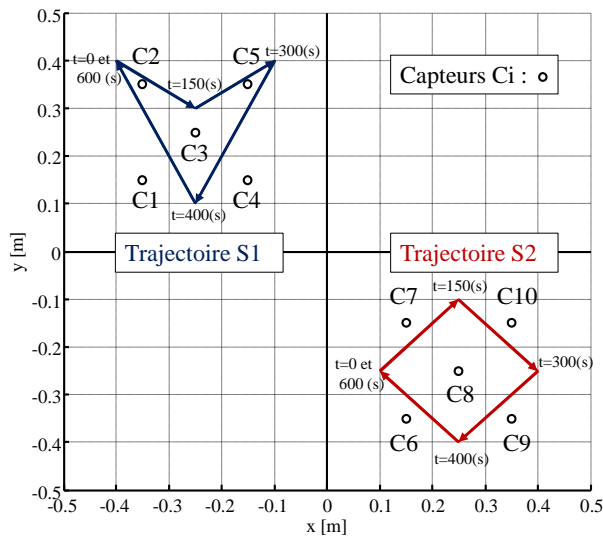


Figure 2.1. Domaine d'étude.

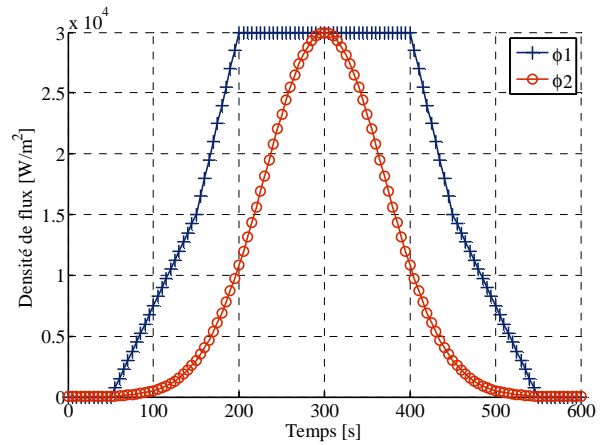


Figure 2.2. Densité de flux réels.

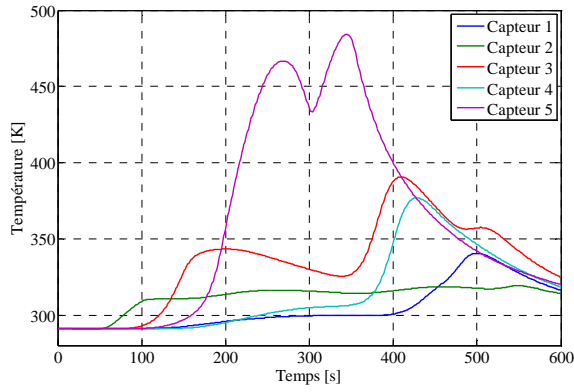


Figure 2.3. Evolution de température
(capteurs $C_{i=1,...,5}$).

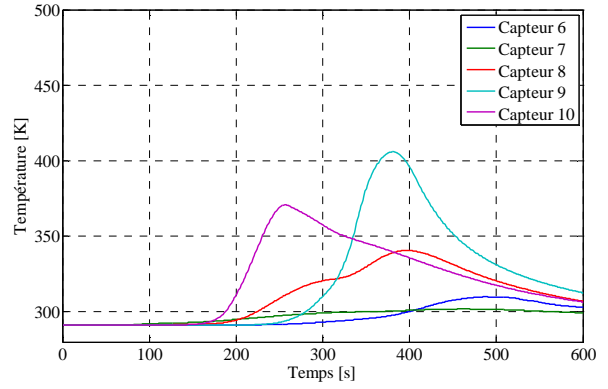


Figure. 2.4. Evolution de température
(capteurs $C_{i=6,...,10}$).

Les figures 2.5 à 2.8 présentent l'évolution du champ de température sur la plaque considérant les trajectoires et des densités de flux connues.

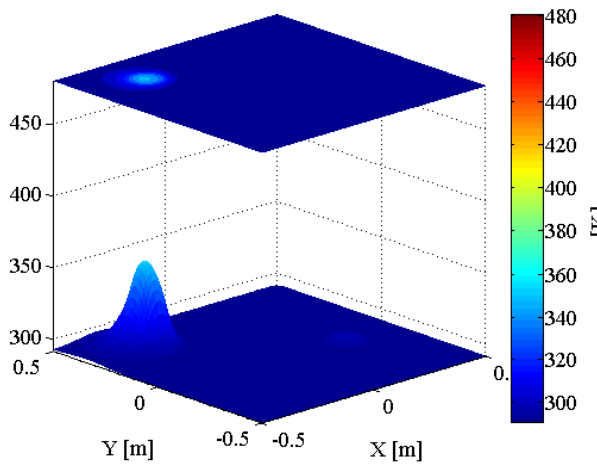


Figure 2.5. Distribution spatiale de la
température à $t = 150$ s.

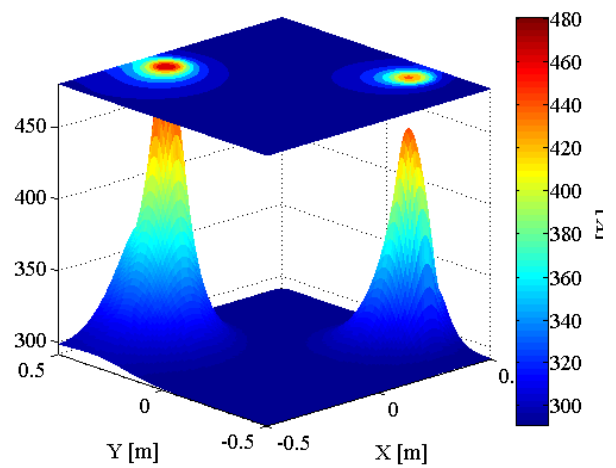


Figure 2.6. Distribution spatiale de la
température à $t = 300$ s.

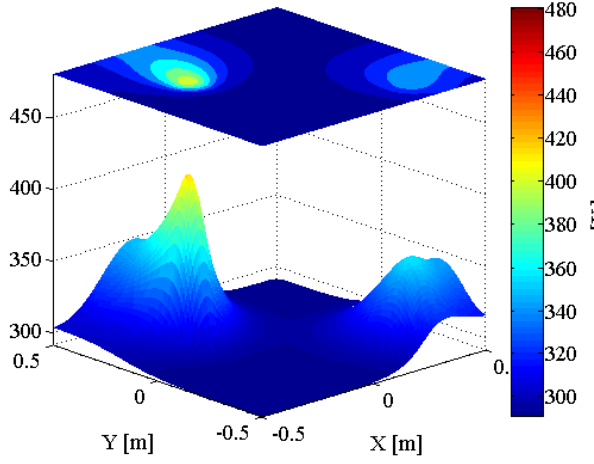


Figure 2.7. Distribution spatiale de la température à $t = 450$ s.

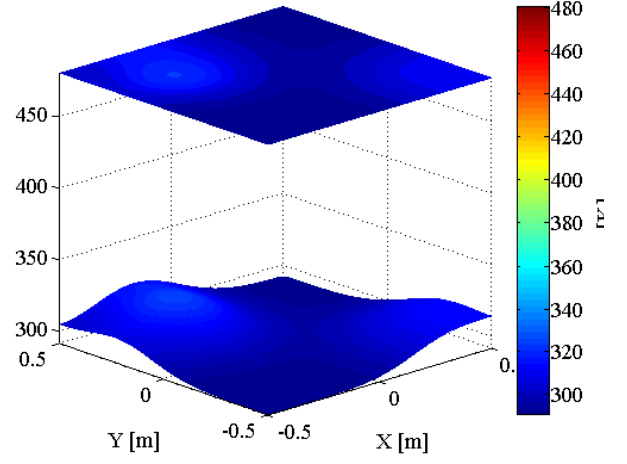


Figure 2.8. Distribution spatiale de la température à $t = 600$ s.

1.2. Problème Inverse.

1.2.1. Formulation du problème.

Afin d'identifier les valeurs des densités de flux $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ à partir des évolutions de températures $\theta_i(t)$ issues des capteurs C_i ($i=1,2,\dots,10$) placés sur la plaque, un problème inverse peut être formulé et résolu en minimisant un critère quadratique. Sa résolution consiste à minimiser le critère suivant :

$$J(\theta, \bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N_c} \int_0^{t_f} (\theta(C_i, t; \bar{\Phi}) - \hat{\theta}_i(t))^2 dt \quad \text{avec} \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N_t} \quad (2.4)$$

Une méthode de régularisation itérative de gradient conjugué a été mise en œuvre pour identifier les paramètres inconnus (Perez, et al., 2008), (Beddiaf, et al., 2012). L'algorithme de cette méthode consiste à résoudre trois problèmes bien posés au sens d'Hadamard :

- Un problème direct (2.3) afin de calculer le critère $J(\theta, \bar{\Phi})$ (2.4) et juger de la qualité des estimations de Φ^k à l'itération k .
- Un problème adjoint (2.9) pour déterminer le gradient de la fonction coût $J(\theta, \bar{\Phi})$ et définir la direction de descente.
- Un problème de sensibilité (2.5) pour calculer la profondeur de descente (2.7) (dans la direction de descente).

1.2.2. Le problème de sensibilité.

Considérons $\delta\theta(x, y; t)$ la variation de température induite par une variation de la densité des flux de chauffe $\phi_j (j=1, 2)$. $\delta\theta(x, y; t)$ est solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial \delta\theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \delta\theta(x, y; t) = \frac{\delta\Phi(x, y; t) - 2h\delta\theta(x, y; t)}{e} \quad \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \delta\theta(x, y; 0) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \delta\theta(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \forall (x, y; t) \in \partial\Omega \times [0, t_f] \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Avec

$$\begin{aligned} \delta\Phi(x, y; t) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\delta\phi_j(t)}{\pi} \left(-\arctan(A_j(x, y)) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 (\overline{\delta\phi_j})^{tr} \overline{s(t)} \left(-\arctan(A_j(x, y)) + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La solution $\delta\theta(x, y; t)$ du problème de sensibilité permet ainsi de calculer la profondeur de descente pour chaque itération k telle que :

$$\gamma^k = \underset{\gamma \in \mathbb{R}}{\text{Arg min}} J(\overline{\Phi} - \gamma d^k) = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(C_i, t; \overline{\Phi}^k) - \hat{\theta}_i(t) \right) \delta\theta(C_i, t; \overline{\Phi}^k) dt}{\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left[\delta\theta(C_i, t; \overline{\Phi}^k) \right]^2 dt} \quad (2.7)$$

La direction de descente (à l'itération k) $d^k \in \mathbb{R}^{2N_t}$ est définie selon l'algorithme du gradient conjugué et dépend du gradient de la fonction coût.

1.2.3. Le problème adjoint.

Afin de déterminer le gradient de la fonctionnelle $\nabla J^k = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial J}{\partial \phi_1^{i,k}} \\ \frac{\partial J}{\partial \phi_2^{i,k}} \end{array} \right)_{i=(1, \dots, N_t)}$ à chaque itération de

l'algorithme de minimisation, une formulation Lagrangienne $\ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)$ est introduite telle que :

$$\ell(\theta, \Phi, \psi) = J(\theta, \Phi) + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\rho c \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y; t) - \frac{\Phi(x, y; t)}{e} + \frac{2h(\theta(x, y; t) - \theta_0)}{e} \right) \psi dt d\Omega \quad (2.8)$$

La variation du Lagrangien peut s'écrire telle que :

$$\delta \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi) = \frac{\partial \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)}{\partial \theta(x, y; t)} \delta \theta + \frac{\partial \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)}{\partial \psi} \delta \psi$$

Lorsque $\psi(x, y; t)$ est fixée, et lorsque les équations adjointes sont vérifiées et considérant $\theta(x, y; t)$ solution du problème direct alors il résulte que :

$$\delta \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi) = \frac{\partial \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)}{\partial \Phi} \delta \Phi = \delta J(\theta, \Phi)$$

Ainsi la variation Lagrangienne peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi) &= \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(x_i, y_i; t; \bar{\Phi}) - \hat{\theta}_i(x_i, y_i; t) \right) \delta \theta(x_i, y_i; t) dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[\rho c \frac{\partial \delta \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \delta \theta(x, y; t) - \frac{\delta \Phi - 2h(\delta \theta(x, y; t))}{e} \right] \psi(x, y; t) dt d\Omega \end{aligned}$$

Considérant les équations du problème de sensibilité (2.5), $\psi(x, y; t)$ est solution du problème (2.9) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] & \rho c \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial t} + \lambda \Delta \psi(x, y; t) = E(x, y; t) + \frac{2h\psi(x, y; t)}{e} \\ \forall (x, y) \in \Omega & \psi(x, y; t_f) = 0 \\ \forall (x, y; t) \in \partial \Omega \times [0, t_f] & -\lambda \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial \bar{n}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Avec $E(x, y; t) = \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(x_i, y_i; t; \bar{\Phi}) - \hat{\theta}_i(x_i, y_i; t) \right) \delta_D(x - x_i) \delta_D(y - y_i)$ et

$\delta_D(x - x_i) \delta_D(y - y_i)$ la distribution de Dirac au capteur $C_i(x_i, y_i)$.

Lorsque $\psi(x, y; t)$ est solution du problème (2.9) alors :

$$\begin{aligned} \delta \ell(\theta, \Phi, \psi) &= \frac{\partial \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)}{\partial \Phi} \delta \Phi = \delta J(\theta, \Phi) \\ \delta J(\theta, \Phi) &= - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[\frac{\delta \Phi(x, y; t) \psi(x, y; t)}{e} \right] d\Omega dt \\ &= - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \frac{1}{e} \left[\sum_{j=1}^2 \frac{\delta \phi_j(t)}{\pi} \left(-\arctan(A_j(x, y)) + \frac{\pi}{2} \right) \right] \psi(x, y; t) d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ainsi le gradient s'exprime par :

$$\text{pour } j=1, 2 \quad \frac{\partial J}{\partial \phi_j^i} = - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \frac{s_i(t)}{\pi} \left(-\arctan(A_j(x, y)) + \frac{\pi}{2} \right) \left[\frac{\psi(x, y; t)}{e} \right] d\Omega dt \quad (2.11)$$

1.3. Résultats numériques.

1.3.1. La méthode du gradient conjugué hors ligne (MGC-HL).

Pour l'initialisation de l'algorithme $k=0$, considérons les densités de flux de chaleur suivantes $\phi_1^k(t) = \phi_2^k(t) = 0 \quad (\forall t \in T)$. La méthode de régularisation itérative du gradient conjugué est mise en œuvre afin d'identifier les densités de flux des deux sources mobiles à partir de données numériques bruitées ($\mathcal{N}(0,0.5)$) aux 10 capteurs. Les évolutions de température non bruitées sont présentées (Figure 2.3 et Figure 2.4). Les valeurs de la fonction coût en fonction des itérations sont présentées (Figure 2.9). La procédure d'identification a convergé en 82 minutes avec un critère d'arrêt $J_{stop} = \frac{1}{2} N_c N_t \sigma^2$ (Alifanov, 1974). Les densités de flux des deux sources mobiles identifiées sont portées sur la (Figure 2.10).

Afin de vérifier la validité des densités de flux identifiées, les résidus de température entre les données réelles et simulées ont été calculés et sont reportés dans le Tableau 2.2 :

Tableau 2.2. Résidus de température

	moyenne des résidus (K)	écart type moyen des résidus (K)
Capteurs $C_{j=(1,\dots,10)}$	0.002	0.499

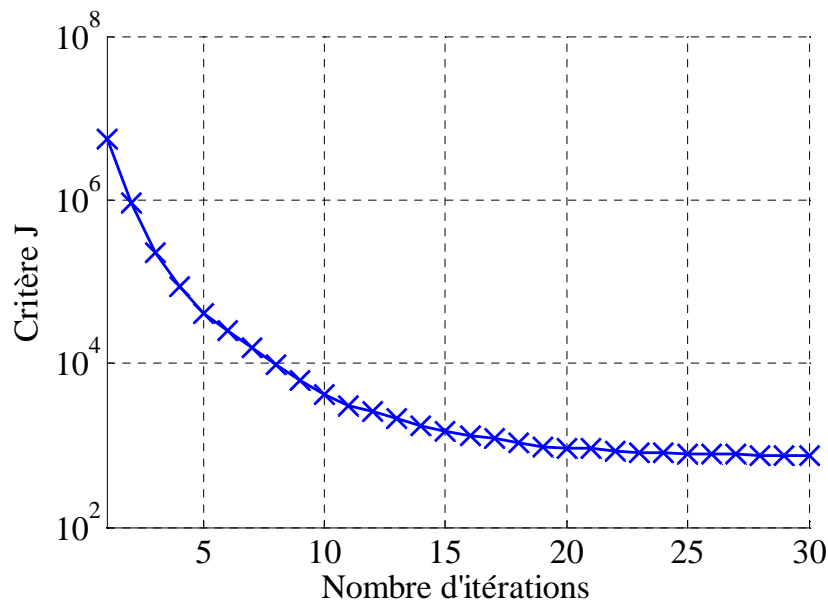


Figure 2.9. Evolution de la fonction coût.

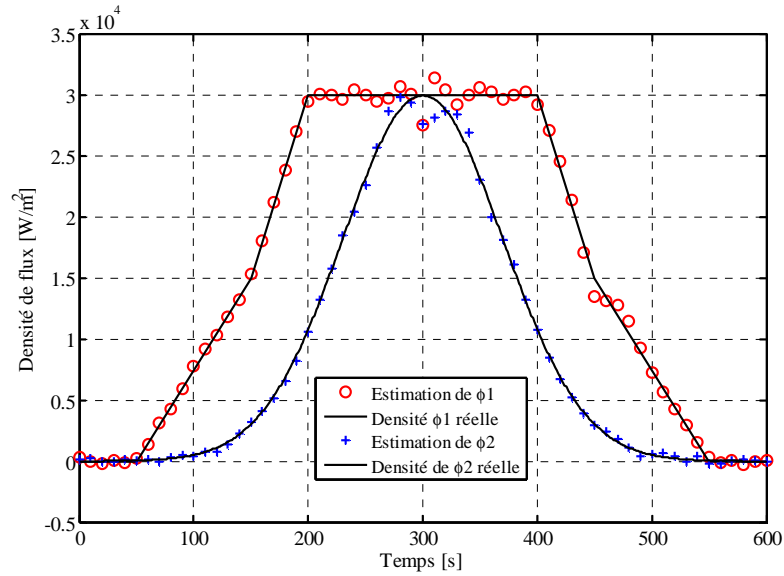


Figure 2.10. Estimation des densités de flux de chaleur (Sources 1 & 2).

1.3.2. La méthode du gradient conjugué en ligne (MGC-EL).

Les résultats présentés ci-dessus montrent bien l'efficacité de la méthode du gradient conjugué (MGC) lors de l'identification de flux thermiques des sources mobiles. Cependant les deux densités de flux de chauffe ont été identifiées après 82 minutes alors que la durée expérimentale était de 10 minutes. Le principal inconvénient de cette méthode est le temps de convergence qui peut être très long en fonction de la complexité des problèmes et de l'intervalle de temps sur lequel l'identification est réalisée. Ainsi, la stratégie pour le choix d'un intervalle de temps associé à un objectif d'identification est cruciale. Considérons les notations sur la définition du temps suivantes. Le temps expérimental est dénotée par t_{ex} et peut être considéré comme le temps « réel » (ou courant) qui commence à $t = 0$ s. À chaque seconde, une nouvelle mesure est obtenue. Après 600 secondes, l'expérimentation est arrêtée. Le temps d'identification est dénotée par t_{id} et peut être considéré comme l'instant pour lequel un résultat d'identification est obtenu. Afin d'illustrer cela, trois stratégies pour une durée d'expérimentation égale à 10 minutes (= 600 s) sont proposées ci-dessous:

- S-A: L'algorithme d'identification est lancé à l'issue de l'expérimentation et les résultats d'identification sont obtenus après 82 minutes. Il s'agit de la méthode hors ligne usuellement utilisée la MGC-HL.
- S-B: L'algorithme d'identification est lancé toutes les 60 secondes et la durée de l'identification est inférieure à 60 secondes. Dans un tel cas, l'algorithme d'identification doit toujours attendre de nouvelles mesures.

- S-C: L'algorithme d'identification est lancé toutes les 10 secondes et la durée d'identification est supérieure à 10 secondes. Dans ce cas, l'algorithme d'identification est toujours en retard et celui-ci est lancé dès que l'identification précédente est terminée.

Ces différentes stratégies sont illustrées en (Figures 2.11, 2.12 et 2.13). Le retard total est la différence $\Delta_{tot} = t_{id} - t_{ex}$ lorsque toutes les mesures ont été prises en compte pour l'identification. Le retard d'exécution $\Delta_{run} = t_{id} - t_{ex}$ est le retard correspondant à une réalisation de l'identification basée sur les dernières mesures obtenues (en ligne).

- Stratégie S-A: $\Delta_{tot} = \Delta_{run} = 82$ minutes
- Stratégie S-B: $\Delta_{tot} < 60$ secondes et $\Delta_{run} < 60$ secondes
- Stratégie S-C: $\Delta_{tot} = 522$ secondes et $\Delta_{run} < 20$ secondes

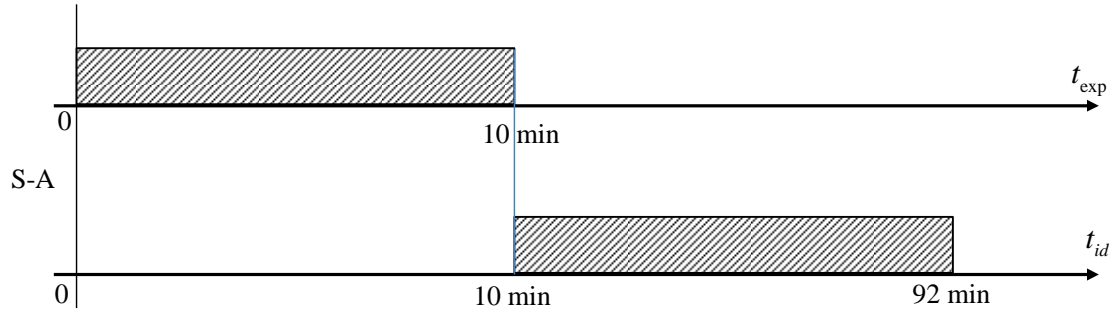


Figure 2.11. Représentation graphique de la stratégie de S-A.

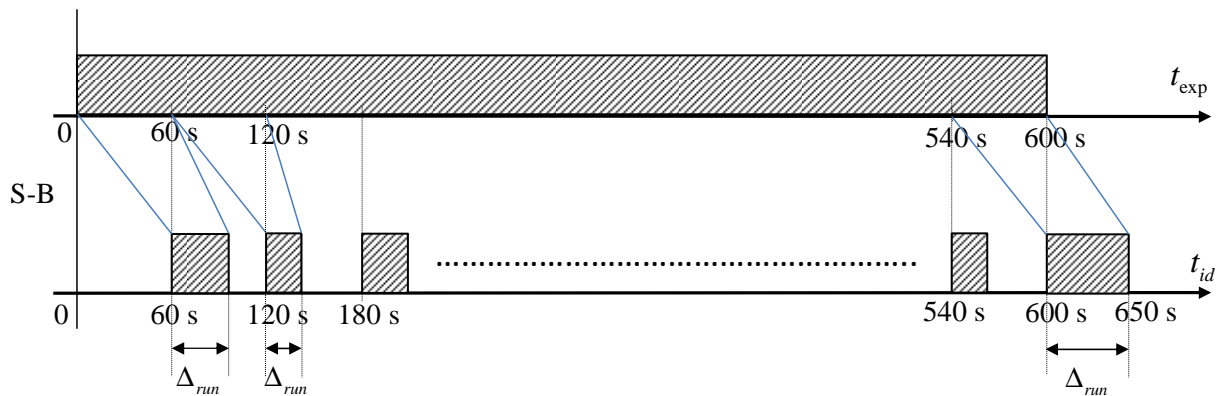


Figure 2.12. Représentation graphique de la stratégie de S-B.

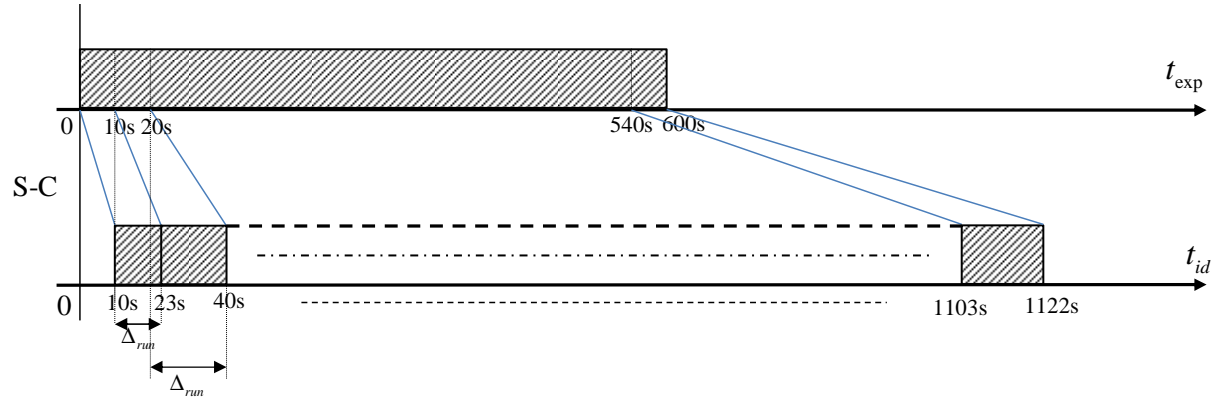


Figure 2.13. Représentation graphique de la stratégie de S-C.

Il est évident que la stratégie de S-A induit un retard très important. La stratégie plus rapide devrait être S-B, mais il n'est pas possible de développer cette approche de manière systématique et dans la pratique, selon les variations des paramètres inconnus (et la sensibilité des mesures) le comportement de l'algorithme d'identification peut basculer entre S-B et S-C au cours même de l'expérimentation. Ainsi plusieurs stratégies vont être proposées et analysées dans les sections suivantes.

L'adaptation de l'algorithme de la méthode du gradient conjugué est ainsi implémentée considérant un intervalle de temps pour l'identification $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+] \subset T$ glissant sur l'horizon temporel total avec un pas $0 < \Delta t_i < \tau_i^+ - \tau_i^-$ afin d'identifier les valeurs des paramètres inconnus $\phi_1^{\mathcal{T}_i}(t), \phi_2^{\mathcal{T}_i}(t)$ sur cet intervalle \mathcal{T}_i . Lorsque les valeurs des paramètres recherchées sont jugées satisfaisantes sur l'intervalle \mathcal{T}_i (ou que le nombre d'itération est supérieur au nombre d'itérations max), la fenêtre d'identification est translatée sur un nouvel intervalle de temps $\mathcal{T}_{i+1} = [\tau_i^- + \Delta t_i^-, \tau_i^+ + \Delta t_i^+] = [\tau_{i+1}^-, \tau_{i+1}^+]$ considérant une initialisation basée sur $\phi_j^{\mathcal{T}_i}(\tau_i^+)$. De plus la température initiale pour la résolution du problème direct sur l'intervalle \mathcal{T}_{i+1} est initialisée avec : $\theta(x, y, \tau_{i+1}^-)$. Ci-dessous est présenté un algorithme décrivant le comportement de la procédure d'identification en ligne.

Algorithme de la méthode du gradient conjugué en ligne (MGC-EL)

- *Etape 1 : résolution du problème direct sur l'intervalle de temps \mathcal{T}_i*
- *Etape 2 : Calcul de la fonction coût avec les valeurs de température estimées sur intervalle de temps \mathcal{T}_i et des mesures associées.*
 - *Si le critère est inférieur au critère d'arrêt ou que le nombre d'itération maximum est atteint, alors l'identification réalisée sur l'intervalle \mathcal{T}_i est arrêtée et un nouvel intervalle de temps est considéré \mathcal{T}_{i+1} (aller à l'étape 1 avec $i = i + 1$).*
 - *Résolution du problème adjoint sur l'intervalle de temps \mathcal{T}_i*
 - *Calcul de la direction de descente sur l'intervalle \mathcal{T}_i considérant le gradient de la fonction coût issue des résolutions précédentes du problème adjoint.*
 - *Résolution du problème de sensibilité sur l'intervalle de temps \mathcal{T}_i afin de calculer la profondeur de descente (dans la direction de descente).*
 - *Mise à jour des estimations des paramètres inconnus estimées sur l'intervalle de temps \mathcal{T}_i .*
 - *(aller à l'étape 1 avec $i = i + 1$).*

Dans les paragraphes suivants, plusieurs stratégies basées sur cette approche sont proposées et analysées.

1.3.2.1. Stratégie 1 : décalage à pas constant (MGC-EL-DC).

Pour cette première stratégie, l'intervalle de temps de la fenêtre $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+] \subset T$ utilisé pour identifier les valeurs de $\phi_{1_{\mathcal{T}_i}}(t), \phi_{2_{\mathcal{T}_i}}(t)$ est fixé à un intervalle constant $\tau_i^+ - \tau_i^- = 60 \text{ s}$ (10% du temps global d'identification). Cette première stratégie repose sur un décalage constant de \mathcal{T}_i avec $\Delta t < \tau_i^+ - \tau_i^-$ pour assurer un chevauchement des intervalles d'identification. Dans un premier temps la valeur de décalage $\Delta t = 15 \text{ s}$ (25% de l'intervalle de temps \mathcal{T}_i) est étudiée, les résultats de l'identification des deux flux de chauffe sont présentés en (Figure 2.14). La convergence de cette identification a été obtenue au bout de $t_{id} = 24 \text{ minutes}$ (i.e. $\Delta_{tot} = 14 \text{ minutes}$ après la fin de l'enregistrement des mesures). Afin de comparer avec la méthode du gradient conjugué résolue sur l'ensemble des données, plusieurs pas de décalage ont été testés (Tableau 2.3). Le nombre d'intervalle de temps \mathcal{T}_i est $N_{\mathcal{T}} = \frac{540}{\Delta t} + 1$.

Tableau 2.3. Résultats des résidus de température.

$\Delta t \text{ (s)}$	moyenne des résidus (K)	écart type moyen des résidus (K)	Retard moyen (s) $\mu_{delay} = \frac{1}{N_{\mathcal{T}}} \sum_{N_{\mathcal{T}}} \Delta_{run}$	Temps d'identification t_{id} (s)
15	-0.023	0.509	468	1469
30	-0.055	0.526	398	1426
45	-0.036	0.526	233	1014

Dans le tableau ci-dessus, l'influence du choix du pas de décalage est mise en évidence. En choisissant, un pas de décalage Δt petit (ex : 15 s), les résidus de température sont meilleurs par rapport à un choix Δt grand (ex : 45 s). En réduisant le pas de décalage de la fenêtre l'identification est réalisée plus de fois qu'avec un pas de décalage grand, donnant ainsi un temps d'identification plus grand, 1469 s pour un décalage de temps Δt de 15 s contrairement à 1014 s pour un décalage de 45s. Un compromis entre accélération du temps de calcul et fiabilité des résultats d'identification pourrait être donné en utilisant un décalage de temps égal à la moitié de la fenêtre d'identification.

Considérant les résultats présentés (Tableau 2.3), cette méthode révèle son efficacité pour une identification quasi en ligne des deux vecteurs de paramètres inconnus. Les moyennes et les

écarts types des résidus de températures sont acceptables compte tenu du bruit gaussien $\mathcal{N}(0,0.5)$ sur les données capteurs.

Les résultats de l'identification pour cette méthode sont présentés (Figure 2.14) avec un pas de décalage correspondant à $\Delta t = 15s$. Considérant que des mesures sont prises toutes les secondes, les retards Δ_{run} entre les mesures et les résultats de l'identification sur l'intervalle sont présentés (Figure 2.15).

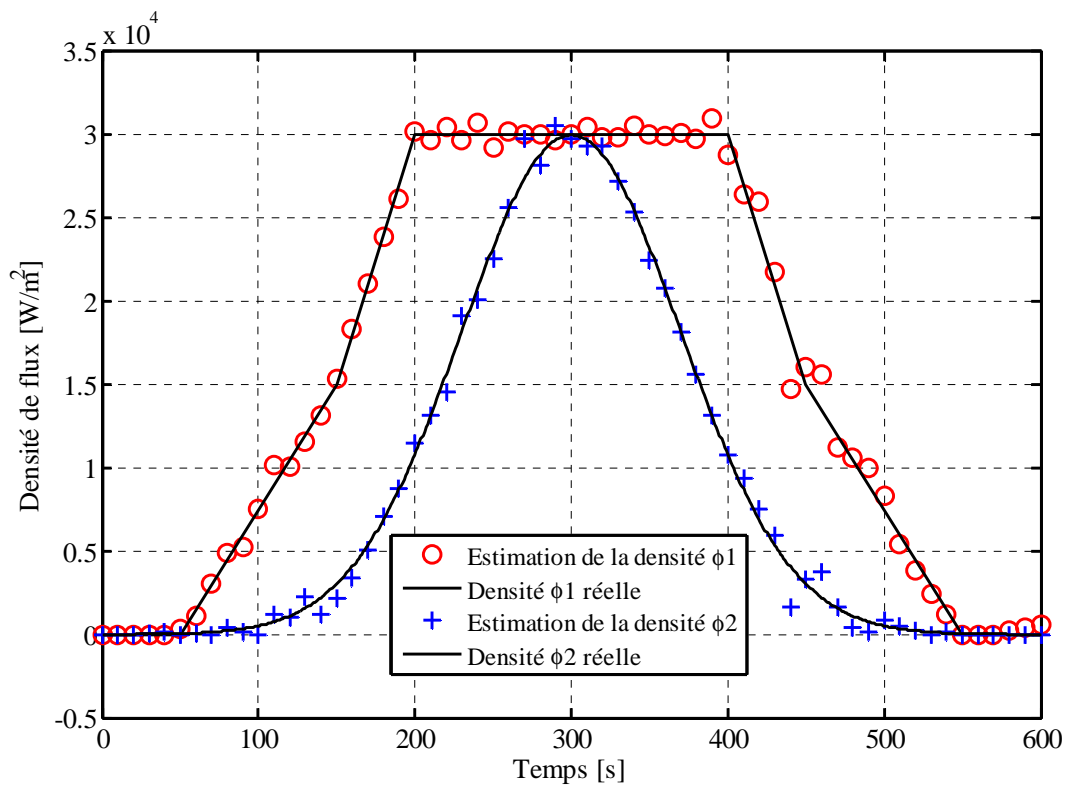


Figure 2.14. Résultats de l'approche mode glissant avec ($\Delta t = 15s$).

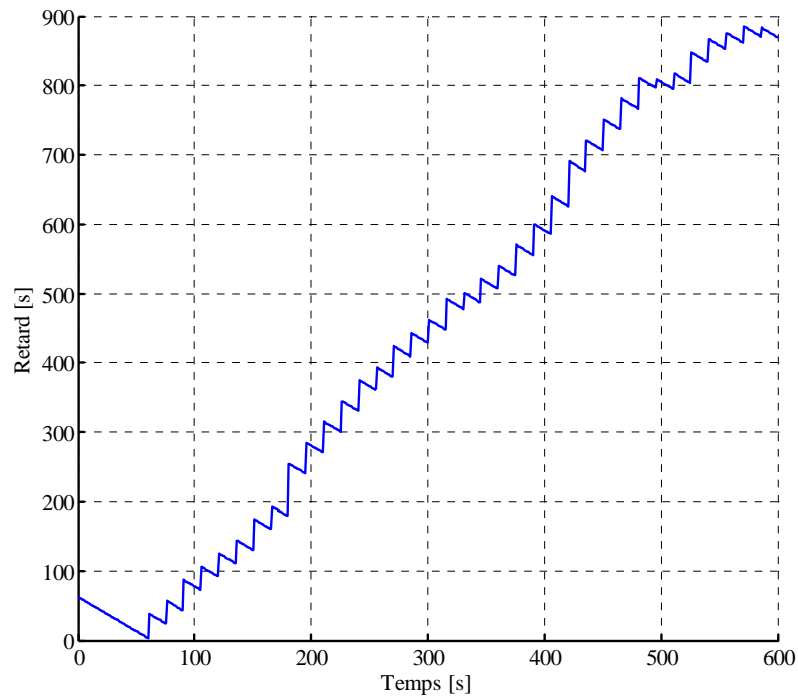


Figure 2.15. Retard Δ_{run} entre les résultats de l'identification et les mesures avec ($\Delta t = 15s$)

Cette première adaptation de la MGC permet de réduire le temps de calcul de la procédure d'identification. Considérant les résultats présentés dans le Tableau 2.3, cette méthode peut être considérée comme efficace. Toutefois, tel qu'il est illustré à la Figure 2.15 le retard entre les résultats moyens d'identification et de mesures grandit au fil du temps. Afin d'évaluer l'influence du choix de la fenêtre de temps les résultats sont présentés au Tableau 2.4.

Tableau 2.4. Résultats de la campagne avec la stratégie 1.

		μ_{res}	Moyenne résiduelle (K)			
		σ_{res}	Écart type résiduel (K)			
		μ_{delay}	Retard moyen sur l'identification (s)			
		t_{id}	Temps d'identification (s)			
		$N_{\mathcal{T}}$	Nombre de résolution de problème d'identifications			
Fenêtre temporelle	Offset Δt	μ_{res}	σ_{res}	μ_{delay}	t_{id}	$N_{\mathcal{T}}$
40	10	-0,022	0,521	451	1561	57
40	20	-0,013	0,507	162	978	29
40	30	-0,027	0,530	221	1100	20
60	15	-0,024	0,510	442	1469	37
60	30	-0,056	0,526	394	1426	19
60	45	-0,036	0,526	250	1014	13
80	20	0,015	0,517	898	2341	27
80	40	0,010	0,534	453	1459	14
80	60	0,002	0,559	305	1157	10
100	25	0,005	0,516	920	2181	21
100	50	-0,005	0,561	536	1555	11
100	75	-0,037	0,598	350	1195	8

Les résultats présentés dans le Tableau 2.4 montrent l'influence de la largeur de la fenêtre sur la qualité de l'estimation des paramètres inconnus et sur le temps de calcul. En effet, pour un choix de taille de fenêtre de 40 et 60 secondes les résultats les plus intéressants sont obtenus avec un pas de décalage équivalent à la moitié et au trois quart de la taille de la fenêtre. Les résultats obtenus sur les résidus de températures sont très satisfaisants et les temps d'identification t_{id} sont plus courts. Cependant pour des tailles de fenêtres plus grandes (80 et 100 secondes), les résultats les plus satisfaisants sont obtenus avec un Δt plus petit. Le choix de la taille de fenêtre a donc une importance capitale. Il est possible de constater qu'en

choisissant une fenêtre d'identification petite, les estimations des paramètres inconnus sont calculées plus rapidement qu'avec une plus grande fenêtre. Le choix du pas de décalage influe également sur l'identification. Compte tenu des résultats précédents, un pas de décalage égal à la moitié de la fenêtre semble un bon compromis. Afin de surmonter ce problème du choix de décalage, une deuxième stratégie basée sur un chevauchement adaptatif est étudiée et présentée dans la section suivante.

1.3.2.2. Stratégie 2 : décalage à pas adaptatif (MGC-EL-DA).

Pour cette deuxième méthode, considérons l'intervalle de temps suivant $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+] \subset T$ avec $\tau_i^+ - \tau_i^- = 60 \text{ s}$. L'identification sur cet intervalle de temps est effectuée pendant un temps CPU équivalent à t_i . Lorsque l'identification est satisfaisante sur \mathcal{T}_i alors immédiatement un nouvel intervalle de temps est considéré $\tau_{i+1}^+ = \tau_i^+ + t_i$ mais si $\tau_{i+1}^+ - \tau_i^+ > 60$ alors $\tau_{i+1}^+ = \tau_i^+ + 30$ et $\tau_{i+1}^- = \tau_{i+1}^+ - 60$. Le chevauchement de l'intervalle de temps peut être défini comme :

$$\text{Rec}(a; b; t_i) = \begin{cases} a - t_i & \text{si } t_i < a \\ b & \text{sinon} \end{cases},$$

Avec a : la taille de la fenêtre d'identification \mathcal{T}_i et b le recouvrement par défaut.

De plus le processus d'identification est lancé uniquement si les nouvelles mesures ne sont pas en adéquation avec les températures prédites en utilisant l'identification préalable de $\phi_{1,\mathcal{T}_i}(t), \phi_{2,\mathcal{T}_i}(t)$. Pour tester l'adéquation entre les mesures et les données de température prédites sur l'intervalle de temps \mathcal{T}_i , un problème direct est résolu pour calculer la fonction coût. Si les mesures sont en accord avec les températures calculées avec le problème direct, un nouvel intervalle de temps est considéré comme égal à $\mathcal{T}_{i+1} = [\tau_i^- + t_i, \tau_i^+ + t_i] \subset T$ avec t_i le temps de la résolution d'un problème direct. Les résultats de l'identification de $\phi_{1,\mathcal{T}_i}(t), \phi_{2,\mathcal{T}_i}(t)$ avec cette méthode sont présentés en (Figure. 2.16). Considérant les mesures prises toutes les secondes, les retards Δ_{rm} entre les mesures et les résultats de l'identification sur l'intervalle considéré sont présentés (Figure. 2.17).

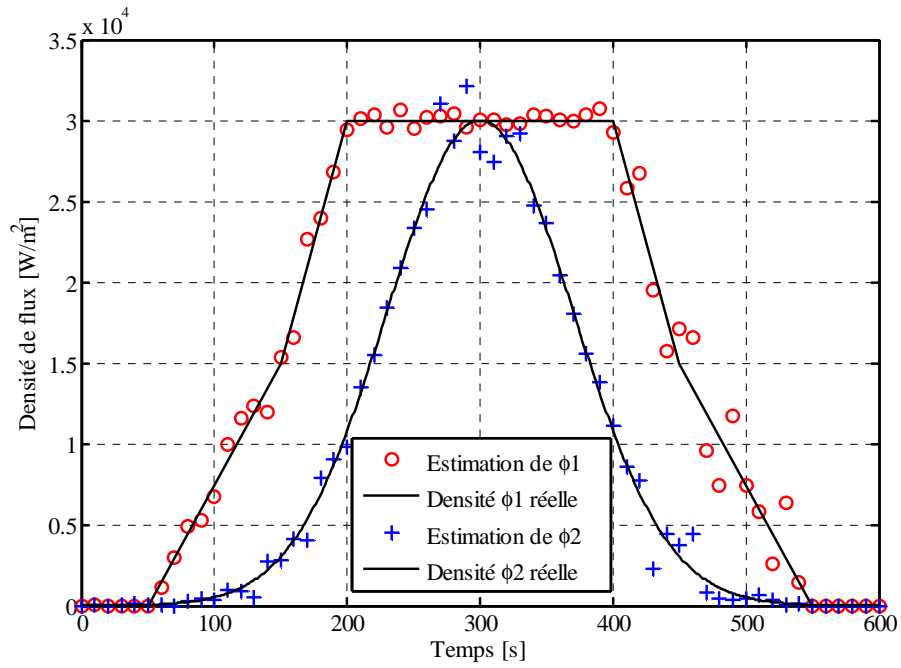


Figure. 2.16. Résultats du mode adaptatif.

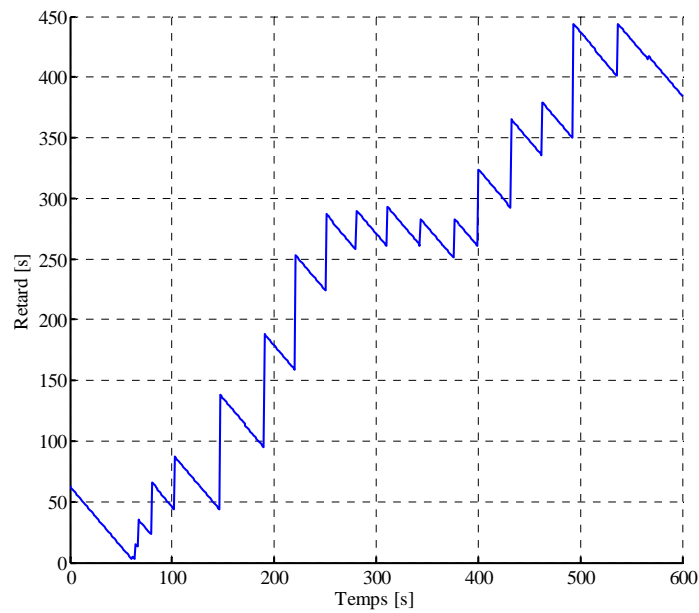


Figure. 2.17. Retard entre les mesures et les résultats d'identification pour « le mode adaptatif ».

Tableau 2.5. Résultats des résidus de température.

moyenne des résidus (K)	écart type moyen des résidus (K)	Retard moyen (s)	$\mu_{delay} = \frac{1}{N_g} \sum_{N_g} \Delta_{run}$	Temps d'identification t_{id} (s)
-0,037	0,527	204		984

Considérant les résultats présentés (Tableau 2.5), cette méthode révèle son efficacité pour une identification quasi en ligne des deux vecteurs de paramètres inconnus. Le principal avantage de cette méthode par rapport à la première stratégie réside en une diminution du temps total de la procédure d'identification. Les paramètres inconnus sont identifiés 6 minutes après la fin de l'expérimentation (durée 10 minutes). Afin de mettre en évidence l'influence du choix de la taille de fenêtre, une campagne de tests avec plusieurs tailles de fenêtre a été réalisée. Les résultats de cette campagne sont portés Tableau 2.6.

Tableau 2.6. Résultats de la stratégie 2.

Fenêtre temporelle	Recouvrement	μ_{res}	σ_{res}	μ_{delay}	t_{id}	N_g
40	Rec(40,10, t_i)	-0,031	0,516	49	743	35
40	Rec(40,20, t_i)	-0,066	0,554	102	1080	38
40	Rec(40,30, t_i)	-0,056	0,543	55	741	35
60	Rec(60,15, t_i)	-0,096	0,532	185	981	22
60	Rec(60,30, t_i)	-0,037	0,527	204	984	20
60	Rec(60,45, t_i)	-0,032	0,531	119	822	16
80	Rec(80,20, t_i)	-0,089	0,543	437	1511	17
80	Rec(80,40, t_i)	-0,001	0,534	408	1333	13
80	Rec(80,60, t_i)	0,004	0,627	287	1105	10
100	Rec(100,25, t_i)	0,000	0,526	506	1393	13
100	Rec(100,50, t_i)	-0,029	0,546	490	1355	11
100	Rec(100,75, t_i)	-0,037	0,598	336	1170	8

Les résultats présentés dans le Tableau 2.6 montrent l'influence de la largeur de la fenêtre sur la qualité de l'estimation des paramètres inconnus et sur le temps de calcul.

En effet, en utilisant une petite taille de fenêtre (ex : 40 et 60 secondes) les résultats de l'estimation sont meilleurs par rapport à une fenêtre de 80 ou 100 secondes. Néanmoins, le taux de recouvrement s'avère être capital. Par exemple, pour une fenêtre de 60 secondes les

meilleurs résultats d'estimations sont obtenus avec un taux égale à $\text{Rec}(60,30,t_i)$ alors que pour une taille de fenêtre de 100 secondes les meilleurs résultats sont obtenus avec un taux de recouvrement égal à $\text{Rec}(100,25,t_i)$. La difficulté reste toujours de choisir une fenêtre permettant d'obtenir de bonnes estimations sur les valeurs des paramètres recherchés tout en ayant un résultat fiable le plus rapidement possible.

Deux stratégies basées sur une estimation prédictive sont présentés dans les deux sections suivantes afin de réduire le temps d'identification.

1.3.3. La méthode du gradient conjugué en ligne prédictive (MGC-EL-P).

Cette section présente une adaptation des stratégies d'estimation en ligne précédentes (paragraphe 1.3.2.1 et 1.3.2.2). Cette adaptation est basée sur la prédiction des valeurs futures des paramètres inconnus pour la prochaine fenêtre d'identification $\mathcal{T}_{i+1} = [\tau_{i+1}^-, \tau_{i+1}^+]$. Les deux méthodes précédentes considéraient une initialisation basée sur la dernière valeur identifiée sur l'intervalle de temps précédent $\phi_{1,\mathcal{T}_{i+1}}^{k=0}(t) = \phi_{1,\mathcal{T}_i}(t = \tau_i^+)$. Les deux stratégies suivantes proposent une nouvelle initialisation des valeurs inconnues sur \mathcal{T}_{i+1} à l'aide de l'évolution sur \mathcal{T}_i (Figure 2.18.) et (Figure 2.19.). La dérivée de la densité de flux de chaleur est calculée sur l'intervalle de temps actuel \mathcal{T}_i et appliquée pour l'initialisation des valeurs inconnues sur le prochain intervalle de temps \mathcal{T}_{i+1} .

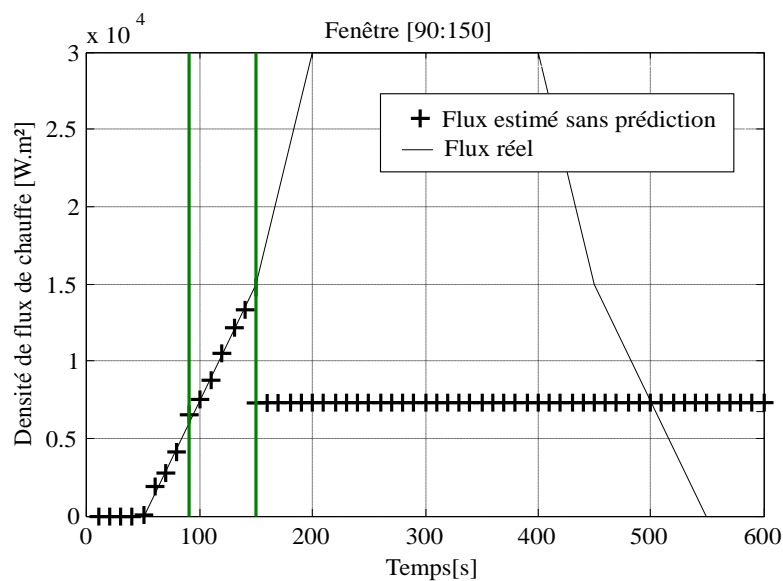


Figure 2.18. Exemple de densité de flux de chaleur identifiée sur $\mathcal{T}_i = [90, 150]$.

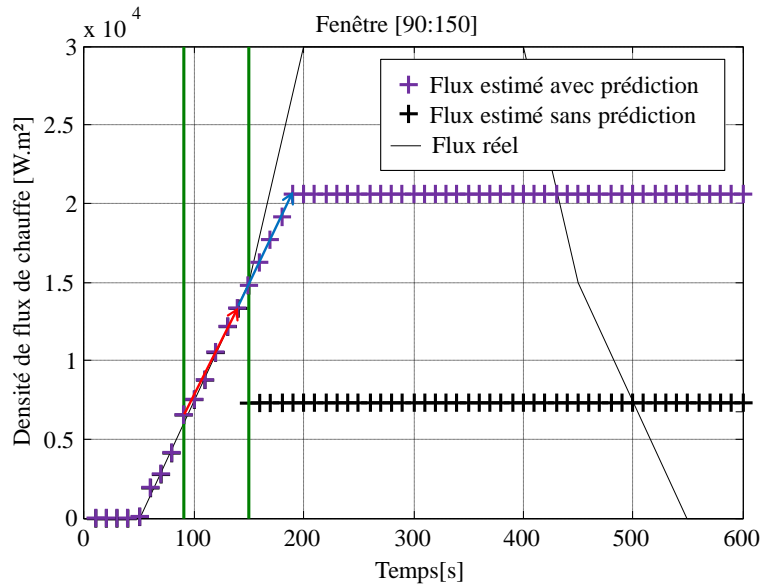


Figure 2.19. Exemple de la prédiction sur le prochain intervalle de temps \mathcal{T}_{i+1} pour l'initialisation de l'algorithme.

Ci-dessous sont présentés les résultats concernant l'adaptation des deux stratégies précédentes (paragraphes 1.3.2.1 et 1.3.2.2) à l'aide de ce nouveau principe d'identification.

1.3.3.1. Stratégie 3 : décalage à pas constant avec estimation prédictive (MGC-EL-P-DC).

Cette stratégie est l'adaptation de la stratégie 1 (paragraphe 1.3.2.1) en utilisant le principe d'identification prédictive. Afin de comparer cette méthode avec des résultats de la première stratégie, la même configuration (largeur de la fenêtre, et pas de décalage) a été réalisée et les résultats sont présentés dans le Tableau 2.7.

Tableau 2.7. Résultats de la stratégie 3.

Fenêtre temporelle	Offset Δt	μ_{res}	σ_{res}	μ_{delay}	t_{id}	$N_{\mathcal{T}}$
40	10	-0,004	0,509	121	793	57
40	20	-0,008	0,516	92	739	29
40	30	-0,008	0,516	38	603	20
60	15	-0,017	0,514	108	727	37
60	30	-0,050	0,506	70	638	19
60	45	-0,012	0,515	78	645	13
80	20	-0,013	0,505	194	896	27
80	40	0,003	0,506	120	692	14

80	60	0,011	0,513	150	737	10
100	25	-0,002	0,518	378	1210	21
100	50	-0,024	0,520	315	1039	11
100	75	-0,012	0,527	249	1025	8

Dans le tableau ci-dessus, on constate que les meilleurs résultats sur les résidus de températures sont obtenus avec un offset petit, donc un taux de recouvrement le plus grand possible. Cependant les retards μ_{delay} sont bien plus grands qu'avec un recouvrement faible (offset grand) : ceci peut s'expliquer par un plus grand nombre de procédure d'identification réalisée $N_{\mathcal{T}}$ avec un petit offset.

Avec cette méthode d'estimation des résultats sont obtenus plus rapidement qu'avec la stratégie 1 (paragraphe 1.3.2.1). La prochaine stratégie repose sur la stratégie 2 (paragraphe 1.3.2.2) avec le mode de prédiction présenté en (paragraphe 1.3.3).

1.3.3.2. Stratégie 4 : décalage à pas adaptatif avec estimation prédictive (MGC-EL-P-DA).

Cette quatrième stratégie est l'adaptation de la stratégie 2 (paragraphe 1.3.2.2) en utilisant le principe d'identification prédictive. Afin de comparer cette méthode avec des résultats de la deuxième stratégie, la même configuration (largeur de la fenêtre, chevauchement) a été examinée et les résultats sont présentés dans le Tableau 2.8.

Tableau 2.8. Résultats de la stratégie 4.

Fenêtre temporelle	Recouvrement	μ_{res}	σ_{res}	μ_{delay}	t_{id}	$N_{\mathcal{T}}$
40	$\text{Rec}(40, 10, t_i)$	0,018	0,519	58	685	61
40	$\text{Rec}(40, 20, t_i)$	-0,027	0,529	47	666	72
40	$\text{Rec}(40, 30, t_i)$	0,046	0,545	37	630	67
60	$\text{Rec}(60, 15, t_i)$	-0,059	0,542	127	859	36
60	$\text{Rec}(60, 30, t_i)$	-0,027	0,526	118	803	26
60	$\text{Rec}(60, 45, t_i)$	-0,028	0,538	86	716	28
80	$\text{Rec}(80, 20, t_i)$	0,010	0,514	216	927	18
80	$\text{Rec}(80, 40, t_i)$	-0,025	0,522	126	736	24

80	$\text{Rec}(80, 60, t_i)$	0,040	0,518	148	794	13
100	$\text{Rec}(100, 25, t_i)$	-0,020	0,539	321	1054	11
100	$\text{Rec}(100, 50, t_i)$	-0,081	0,535	259	893	9
100	$\text{Rec}(100, 75, t_i)$	-0,001	0,566	267	893	8

Dans le tableau ci-dessus, l'influence du taux de recouvrement est mise en évidence, on constate que pour les quatre fenêtres d'identification, un offset équivalent à la moitié de la taille de la fenêtre d'identification est le meilleur compromis entre rapidité et qualité d'estimations.

Avec cette méthode d'estimation des résultats sont obtenus plus rapidement qu'avec la stratégie 2 (paragraphe 1.3.2.2). Une dernière stratégie d'identification est présentée ci-dessous, basée sur un choix adaptatif de la largeur de la fenêtre d'identification.

1.3.4. La méthode du gradient conjugué en ligne prédictive avec taille de fenêtre automatique (MGC-EL-PA).

Considérant les quatre stratégies d'identification précédentes, il a été mis en évidence que la taille et le chevauchement des fenêtres temporelles sont influents sur les résultats de l'identification et sur le délai nécessaire pour obtenir ces résultats. Le choix d'une largeur de fenêtre fixe peut être difficile à estimer (sans connaissance a priori du processus réel). Afin de surmonter cette contrainte une dernière stratégie basée sur une sélection automatique de l'intervalle de temps est présentée ci-dessous.

Considérons l'intervalle de temps $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+] \subset T$ et dt est l'intervalle de temps entre les différentes mesures. Un nouvel algorithme est introduit pour calculer la largeur de l'intervalle de temps d'identification. Ci-dessous est présenté l'algorithme pour le choix de la taille de l'intervalle de temps d'estimation.

Pour une identification requise de τ_i^- , puis : $\tau_i^+ = \tau_i^-$

Faire

- **Étape 1:** ajouter une nouvelle mesure pour le choix de la taille de la fenêtre $\tau_i^+ = \tau_i^- + dt$ et $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+]$
- **Étape 2:** calculer la fonction de coût sur l'intervalle \mathcal{T}_i compte tenu de la valeur prédite des densités de flux de chaleur $\bar{\Phi}$ obtenues sur \mathcal{T}_{i-1}

$$J(\theta, \bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N_c} \int_{\mathcal{T}_i} (\theta(C_i, t; \bar{\Phi}) - \hat{\theta}_i(t))^2 dt$$

- **Étape 3:**

Si $J(\theta, \bar{\Phi}) < K.J_{Stop}$

aller à l'étape 1 afin d'accroître le nombre de mesures

Sinon

lancer le processus d'identification sur $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+]$ avec

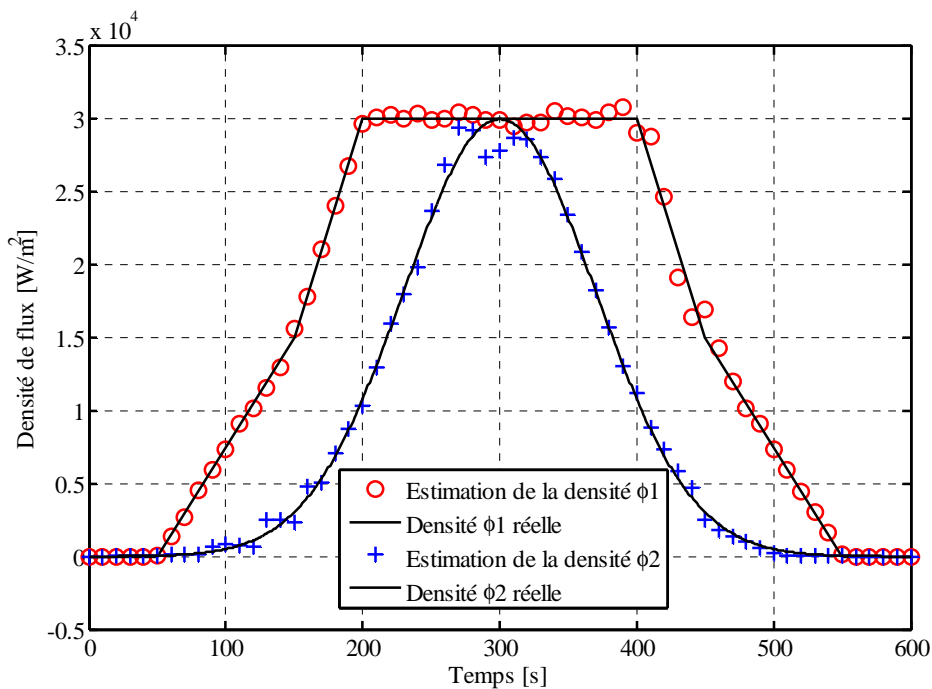
$\tau_i^+ = \max(\tau_i^-, \tau_i^- + T_{min})$. La valeur T_{min} ici est la taille minimale de la fenêtre d'identification.

Remarque : Le coefficient K doit être choisi avec soin. Tout d'abord $K > 1$ sinon il n'est pas possible d'obtenir $J(\theta, \bar{\Phi}) < J_{Stop}$, voir (Alifanov, et al., 1995). Pour une grande valeur de K , l'identification est rarement effectuée et la méthode ressemble à une approche en mode hors ligne. Pour $K \approx 1$, l'identification est trop souvent réalisée et temps CPU pour l'identification induit un grand retard. Les résultats suivants sont présentés pour $K = 3$. L'expression $\tau_i^+ = \max(\tau_i^-, \tau_i^- + 40)$ représente le choix d'une valeur minimale pour la taille de la fenêtre d'identification. Dans ce cas présent, le choix de la taille minimale est de 40 secondes. Ce choix doit être réalisé en fonction de la discrétisation du paramètre recherché. Dans les simulations présentées dans cette section la discrétisation des deux densités de flux est effectuée toutes les 15 secondes. Le choix d'une fenêtre d'estimation minimale de 40 secondes assure ici un calcul minimal de trois valeurs du vecteur de paramètres inconnus. Exemple pour $\mathcal{T}_i = [0, 40]$ les valeurs des densités de flux pour $t = 0, 15, 30$ s sont assurées d'être calculées.

La taille de la fenêtre est modifiée en ligne selon l'algorithme précédent et une résolution d'un problème direct supplémentaire est nécessaire afin d'évaluer si les nouvelles mesures sont en adéquation avec les densités de flux de chauffe prévues. Deux stratégies sont élaborées et présentées ci-dessous. Ces procédures d'identification sont basées sur les stratégies 3 et 4, (paragraphe 1.3.3.1 et 1.3.3.2).

1.3.4.1. Stratégie 5 : décalage à pas constant avec estimation prédictive et taille de fenêtre automatique (MGC-EL-PA-DC).

Cette stratégie repose sur le principe proposé dans la stratégie 3 (1.3.3.1) avec la sélection de la largeur de l'intervalle de temps présenté en 1.3.4. Le décalage à pas constant est égal à la moitié de l'intervalle de temps considéré. Les résultats sont présentés ci-dessous (Figure 2.20 et 2.21) et le Tableau 2.9.



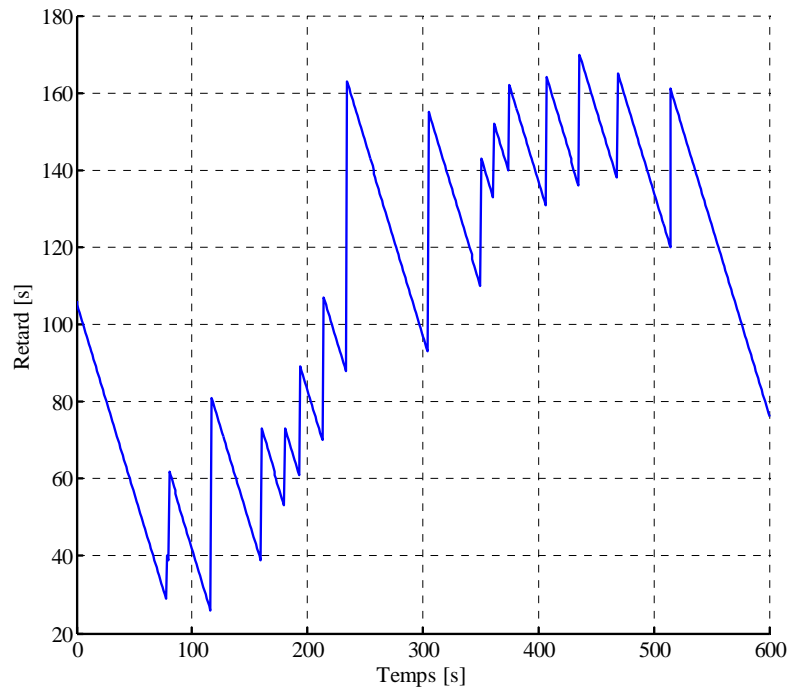


Figure 2.21. Retard entre les mesures et les résultats d'identification avec la stratégie 5.

Tableau 2.9. Résultats de la stratégie 5.

μ_{res}	σ_{res}	μ_{delay}	t_{id}	$N_{\mathcal{T}}$
-0.052	0.53	108	676	17

En ce qui concerne les résultats des résidus de température et d'identification des paramètres inconnus, cette méthode apporte un avantage intéressant sur la difficulté de choix de largeur d'intervalle de temps.

1.3.4.2. Stratégie 6 : décalage à pas adaptatif avec estimation prédictive et taille de fenêtre automatique (MGC-EL-PA-DA).

Cette stratégie repose sur le principe proposé dans la stratégie 4 (1.3.3.2) avec la sélection de la largeur de l'intervalle de temps présenté en 1.3.4. Les résultats d'identification sont présentés ci-dessous (Figure 2.22.) et (Figure 2.23) et le Tableau 2.10.

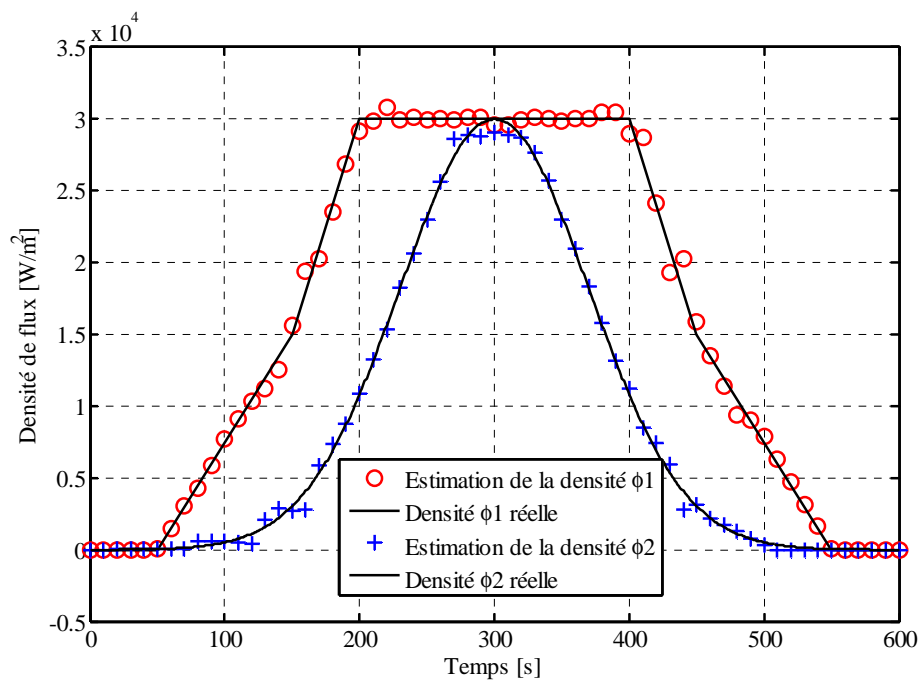


Figure 2.22. Résultats de l'estimation des densités de flux avec la stratégie 6.

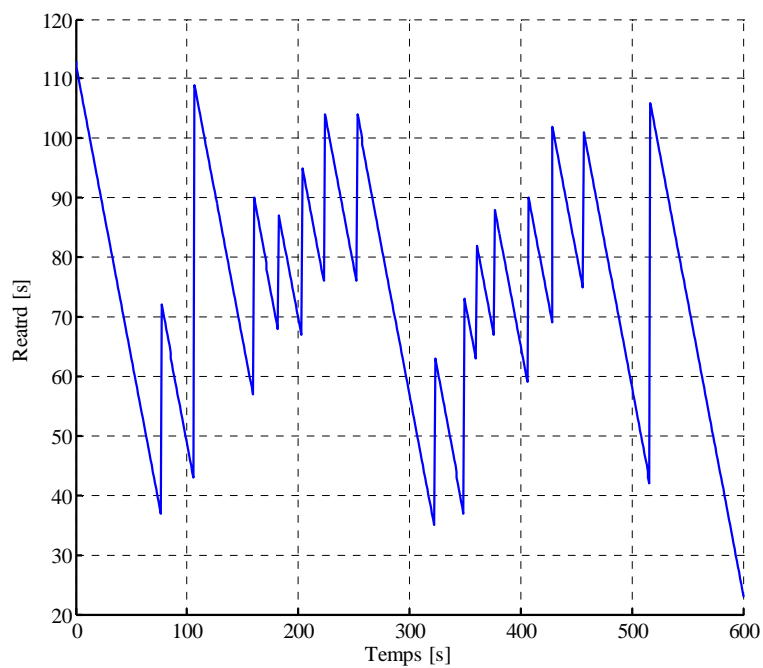


Figure 2.23. Retard entre les mesures et les résultats d'identification avec la stratégie 6.

Tableau 2.10. Résultats de la stratégie 6.

μ_{res}	σ_{res}	μ_{delay}	t_{id}	$N_{\mathcal{T}}$
-0.017	0.51	73	623	17

En ce qui concerne les résultats des résidus de la température et la qualité de l'estimation des paramètres inconnus, cette dernière stratégie est un mélange entre les premières stratégies et peut être considérée comme la stratégie la plus efficace parmi celles testées.

1.4. Bilan.

Dans cette partie, plusieurs approches pour une identification quasi en ligne de la densité du flux thermique fournie par deux sources mobiles ont été présentées. Ces stratégies sont basées sur la méthode du gradient conjugué (MGC) connue pour son efficacité sur les problèmes inverses mal posés décrits par des équations aux dérivées partielles. Plusieurs stratégies sont proposées et leur efficacité est démontrée compte tenu du temps requis pour l'identification et la qualité des résultats. Dans le cas étudié, la MGC hors ligne fournit des résultats pertinents 82 minutes après la fin du processus. L'identification quasi en ligne proposée garantit une identification fiable seulement 23 secondes après la fin du processus. En outre, le délai moyen entre l'observation en ligne et l'identification des paramètres recherchés est de 55 secondes.

2. Identification du couple flux & trajectoire

Cette section est dédiée à la présentation d'une étude portant sur l'identification de la trajectoire et de la puissance d'une source chauffante mobile quasi en ligne. L'identification du couple trajectoire et puissance d'une source mobile est réalisée en géométrie bidimensionnelle en utilisant la méthode itérative du gradient conjugué en ligne (MGC-EL) de manière séquentielle et alternative. En effet alternativement le flux et la trajectoire sont estimés de manière séquentielle. L'algorithme utilisé dans cette étude est explicité ci-dessous et les résultats pour une méthode hors ligne et en ligne seront comparées et présentées.

2.1. Présentation du système d'étude.

Considérons une source mobile chauffante S_1 évoluant sur une plaque $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega = (L \times l)$, de frontière $\partial\Omega \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur e suffisamment petite pour négliger les transferts en son sein (Figure 2.24). Considérons que la densité de flux de chaleur ϕ_s pour cette source est supposée uniforme sur un disque mobile $D_s(I_s, r_s)$ où $I_s(t) = (x_s(t), y_s(t))$ décrit la trajectoire du centre de la source mobile de rayon r_s .

Le flux total peut aussi être exprimé de manière continue et dérivable tel que :

$$\Phi(x, y; t) = \frac{\phi_s(t)}{\pi} \left(-\arctan \left(\mu \left(\sqrt{(x - x_s(t))^2 + (y - y_s(t))^2} - r_s \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.12)$$

La densité de flux de chauffe $\phi_s(t) = \sum_{i=1}^{N_t} \phi_s^i s^i(t) = (\overline{\phi_s})^{tr} \overline{s(t)}$ ainsi que les coordonnées de la

trajectoire du disque de chauffe de la source mobile $x_s(t) = \sum_{i=1}^{N_t} x_s^i s^i(t) = (\overline{x_s})^{tr} \overline{s(t)}$ et

$y_s(t) = \sum_{i=1}^{N_t} y_s^i s^i(t) = (\overline{y_s})^{tr} \overline{s(t)}$ sont discrétisées toutes les 50 secondes pour la méthode hors

ligne sur la base des fonctions chapeaux $s_i(t)$ (chapitre 1 – Figure 1.4).

Ainsi, la distribution spatio-temporelle de température au sein du domaine $\theta(x, y, t)$ est solution du système d'équations aux dérivées partielles (2.13) considérant les paramètres indiqués dans le Tableau 2.11.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y; t) = \frac{\Phi(x, y; t) - 2h(\theta(x, y; t) - \theta_0)}{e} & \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \theta(x, y; 0) = \theta_0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 & \forall (x, y; t) \in \partial\Omega \times [0, t_f] \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Tableau 2.11. Paramètres du modèle

Symbole	Définition	Valeur
ρc	Chaleur volumique	$2.43.10^6 \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$
h	Coefficient de convection naturelle	$15 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
t_f	Temps final	1200 s
λ	Conductivité thermique	$160 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\phi(t)$	Flux de chaleur	Wm^{-2}
θ_0	Température initiale	291 K
L	Longueur	1 m
l	Largeur	1 m
e	Epaisseur de la plaque	2.10^{-3} m
r_j	Rayon de chauffe des sources mobiles	5.10^{-2} m
\vec{n}	Vecteur unitaire (normale externe pointant vers l'extérieur à $\partial\Omega$)	

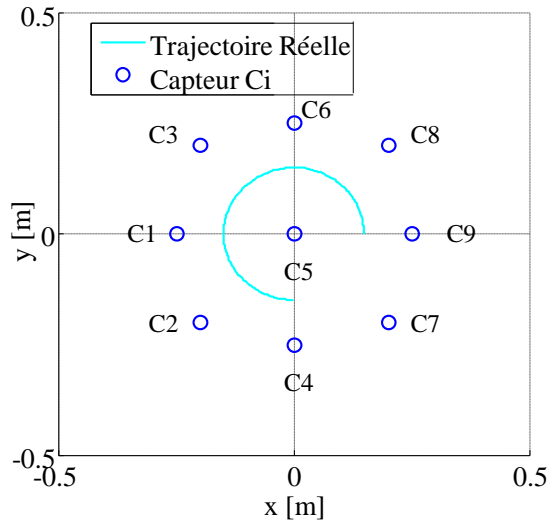


Figure 2.24. Présentation du système d'étude.

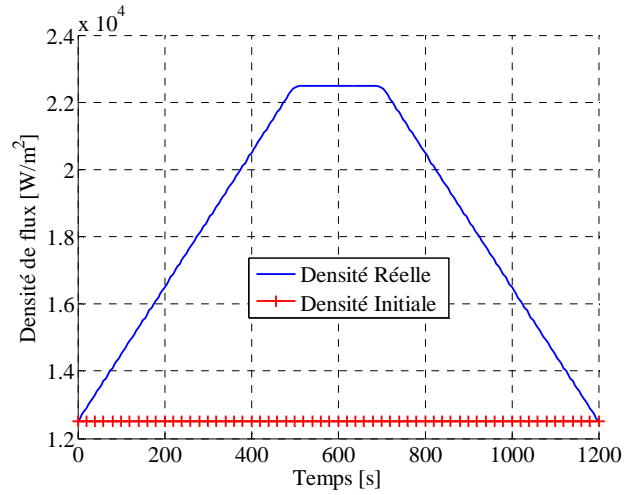


Figure 2.25. Présentation de la densité de flux de chauffe.

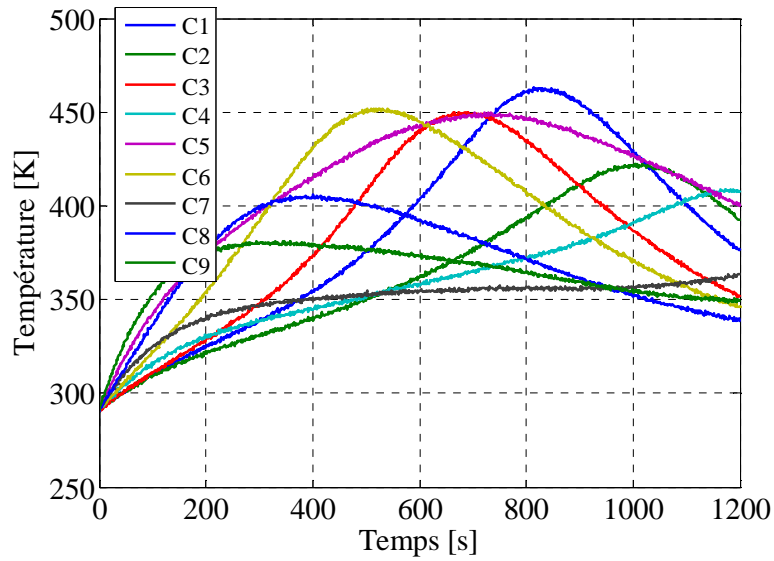


Figure 2.26. Evolution de la température pour les 9 capteurs.

Dans ce qui suit la formulation du problème inverse associé à cette étude est présentée.

2.2. Problème Inverse.

Afin d'estimer la trajectoire et la puissance de la source chauffante mobile, un critère quadratique à minimiser peut être écrit de la manière suivante :

$$J(\theta; \phi(t); x_s(t), y_s(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(C_i; t; \phi(t); x_s(t), y_s(t)) - \hat{\theta}(C_i; t) \right)^2 dt \quad (2.14)$$

Les températures « mesurées » $\hat{\theta}(C_i; t)$ sont obtenues par la résolution du problème direct avec les données exactes. L'algorithme de la MGC est composé comme dans les précédentes études de la résolution de trois problèmes bien posés (direct, adjoint et sensibilité) présentés ci-dessous.

2.2.1. Le problème de sensibilité.

L'objectif principal de la résolution de ce problème de sensibilité est d'étudier la variation de température $\delta\theta(x, y; t)$ induite par la variation du flux de chauffe $\delta\phi(t)$ et par la variation de la trajectoire du centre de la source chauffante $\delta I(t) = (\delta x_s(t), \delta y_s(t))$. En se basant sur le principe de construction de ce problème présenté dans la section 2 du chapitre 1, le système d'EDPs décrivant ces équations peut être écrit comme :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \delta\theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \delta\theta(x, y; t) = \frac{\delta\Phi(x, y; t) - 2h\delta\theta(x, y; t)}{e} & \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \delta\theta(x, y; 0) = 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \delta\theta(x, y; t)}{\partial n} = 0 & \forall (x, y; t) \in \partial\Omega \times [0, t_f] \end{cases} \quad (2.15)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \delta\Phi(x, y; t) = & \frac{\phi(t)}{\pi} \frac{\mu((x_s(t) - x)\delta x_s(t) + (y_s(t) - y)\delta y_s(t))}{\xi(x, y; t) \left(1 + (\mu(\xi(x, y; t) - r_s))^2 \right)} \\ & + \frac{\delta\phi_j(t)}{\pi} \left(-\arctan(\mu(\xi(x, y; t) - r_s)) + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Où : $\xi(x, y; t) = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + (y - y_s(t))^2}$

L'expression de la profondeur de descente est similaire à celle du chapitre 1 : équation (1.17). La formulation du problème adjoint présenté ci-dessous permet de calculer le gradient de la fonctionnelle à minimiser et ainsi pouvoir calculer les prochaines directions de descente des vecteurs de paramètres inconnus.

2.2.2. Le problème adjoint.

La résolution du problème adjoint présenté ci-dessous permet de calculer le gradient de la

fonctionnelle à minimiser suivante : $\vec{\nabla} J = \left(\frac{\partial J}{\partial(\overline{x_s(t)})}, \frac{\partial J}{\partial(\overline{y_s(t)})}, \frac{\partial J}{\partial(\overline{\phi(t)})} \right)$. L'ensemble de la

démarche présenté dans le chapitre 1 section 2.2.3 est mis en œuvre. Le problème adjoint associé est décrit par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] & \rho c \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial t} + \lambda \Delta \psi(x, y; t) = E(x, y; t) + \frac{2h\psi(x, y; t)}{e} \\ \forall (x, y) \in \Omega & \psi(x, y; t_f) = 0 \\ \forall (x, y; t) \in \partial\Omega \times [0, t_f] & -\lambda \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Le gradient de la fonctionnelle peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla J_{\theta^i} = \frac{\partial J}{\partial \phi^i} = - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \frac{s_i(t)}{\pi} \left(-\arctan(\mu(\xi(x, y; t) - r_s)) + \frac{\pi}{2} \right) \left[\frac{\psi(x, y; t)}{e} \right] d\Omega dt \\ \nabla J_{x_s^i} = \frac{\partial J}{\partial x_s^i} = - \frac{1}{\pi} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\phi(t) \left(\sum_{i=1}^{N_t} x_s^i s_i(t) - x \right) A(x, y; t) \frac{\psi(x, y; t)}{e} \right) d\Omega dt \\ \nabla J_{y_s^i} = \frac{\partial J}{\partial y_s^i} = - \frac{1}{\pi} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\phi(t) \left(\sum_{i=1}^{N_t} y_s^i s_i(t) - y \right) A(x, y; t) \frac{\psi(x, y; t)}{e} \right) d\Omega dt \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Avec :

$$A(x, y; t) = \frac{\mu}{\xi(x, y; t) \left(1 + \left(\mu \left(\xi(x, y; t) - r \right) \right)^2 \right)} \quad \xi(x, y; t) = \sqrt{\left(x - x_s(t) \right)^2 + \left(y - y_s(t) \right)^2}$$

2.3. Résultats numériques.

Afin de résoudre le problème exposé dans ce cas d'étude, la MGC se présentera dans cette section sous deux composantes. Dans un premier temps les résultats de l'estimation de la trajectoire et de la densité de flux de la source mobile seront présentés via la résolution de la MGC en mode « Hors ligne ». Puis dans un second temps, la méthode de résolution en ligne par la méthode du gradient conjugué via la technique de décalage à pas adaptatif avec estimation prédictive et taille de fenêtre automatique (MGC-EL-PA-DA) sera présentée (paragraphe 1.3.4.2).

L'algorithme utilisé pour la résolution de ce problème inverse a été introduit par (Beddiaf, 2013). Le détail de cet algorithme est présenté ci-dessous dans le but d'estimer itérativement le vecteur inconnu de la densité de flux $(\bar{\phi}_s)$ et les vecteurs de coordonnées (\bar{x}_s, \bar{y}_s) du centre de la source mobile. En effet, il est délicat de faire une unique résolution car flux et trajectoires ont des ordres de grandeur extrêmement différents ce qui se vérifie aussi sur les gradients et la direction de descente.

Algorithme du gradient conjugué pour l'estimation du flux et trajectoire d'une source mobile.

Etape 1 :

- Initialiser le nombre d'itérations : $k = 1$.
- Initialiser la valeur de la densité de flux de chauffe $\phi^{k=0}(t)$ et la trajectoire initiale de la source mobile $I^{k=0} = (x_s^{k=0}, y_s^{k=0})$.
- (Flux = 1, Traj = 0) La première identification réalisée sera l'identification de la densité de flux.

Etape 2 :

Résolution du problème direct et calcul de $J(\phi^k(t); I^k)$

- Si $J(\phi^k(t); I^k) \leq J_{stop}$, alors : arrêter la procédure d'identification. Les valeurs

courantes du flux de chauffe $\phi^k(t)$ et la trajectoire de la source mobile $I^k = (x_s^k, y_s^k)$ sont considérées comme des estimateurs satisfaisants.

- Si $t_{\mathcal{T}} > \mathcal{T}$, si le temps de calcul $t_{\mathcal{T}}$ (résolution de la procédure d'identification effectuée sur la fenêtre d'identification courante \mathcal{T}_i) est supérieur à la taille de fenêtre \mathcal{T}_i alors on arrête la procédure d'identification sur \mathcal{T}_i pour passer sur \mathcal{T}_{i+1} .
- Sinon, si $J(\phi^k(t); I^k) > J_{stop}$, alors continuer la procédure d'itération.

Etape 3 :

Résolution du problème adjoint

- Si (Flux = 1, Traj = 0), déterminer le gradient de la fonctionnelle $\overrightarrow{\nabla J} = \overrightarrow{\nabla J}_{\phi}$, tandis que $\overrightarrow{\nabla J}_I^k = 0$ et $\delta I(t) = 0$,
- Si (Flux = 0, Traj = 1), déterminer le gradient de la fonctionnelle $\overrightarrow{\nabla J}^k = \overrightarrow{\nabla J}_I^k$, tandis que $\overrightarrow{\nabla J}_{\phi(t)} = 0$ et $\delta \phi(t) = 0$,
- Calcul de la direction de descente $\overrightarrow{d}^{k+1} = -\overrightarrow{\nabla J}^k + \beta^k \overrightarrow{d}^k$ où $\beta^k = \frac{\|\overrightarrow{\nabla J}^{k+1}\|^2}{\|\overrightarrow{\nabla J}^k\|^2}$ (avec $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne et $\beta^{k=0} = 0$),

Etape 4 :

Résolution du problème de sensibilité dans la direction de descente

- Calcul de la variation de température $\delta \theta(x, y; t)$ dans la direction de descente \overrightarrow{d}^{k+1} ,
- Calcul de la profondeur de descente $\gamma^{k+1} = \underset{\gamma \in \mathbb{R}^+}{\text{Arg min}} J(\overrightarrow{\Phi}^k - \gamma \overrightarrow{d}^{k+1})$.

Calcul de la nouvelle valeur de l'itéré selon le cas :

- Si (Flux = 1, Traj = 0) la nouvelle valeur du flux de chauffe est :

$$\phi^{k+1}(t) = \phi^k(t) + \gamma^{k+1} \overrightarrow{d}_{\phi}^{k+1}.$$

- Si (Flux = 0, Traj = 1) la nouvelle valeur de la position de source est :

$$I^{k+1} = I^k + \gamma^{k+1} \overrightarrow{d}_I^{k+1}$$

Si (Flux = 1, Traj = 0) : alors (Flux = 0, Traj = 1) ; $\beta^{k+1} = 0$

Si (Flux = 0, Traj = 1) : alors (Flux = 1, Traj = 0) ; $\beta^{k+1} = 0$

$k \leftarrow k + 1$ aller à l'étape 2.

L'algorithme présenté ci-dessus est utilisé pour une résolution hors ligne via la MGC. Celui-ci doit être adapté avec un concept de fenêtre d'identification glissante sur un horizon temporel avec initialisation prédictive et taille de fenêtre automatique MGC-EL-PA.

2.3.1. Estimation par la méthode du gradient conjugué hors ligne MGC-HL.

La méthode de résolution hors ligne a donc été mise en œuvre afin de résoudre le problème inverse présenté ci-avant. L'initialisation de cet algorithme à $k = 0$ des trois vecteurs de paramètres inconnus est présentée Figures 2.27 et 2.28.

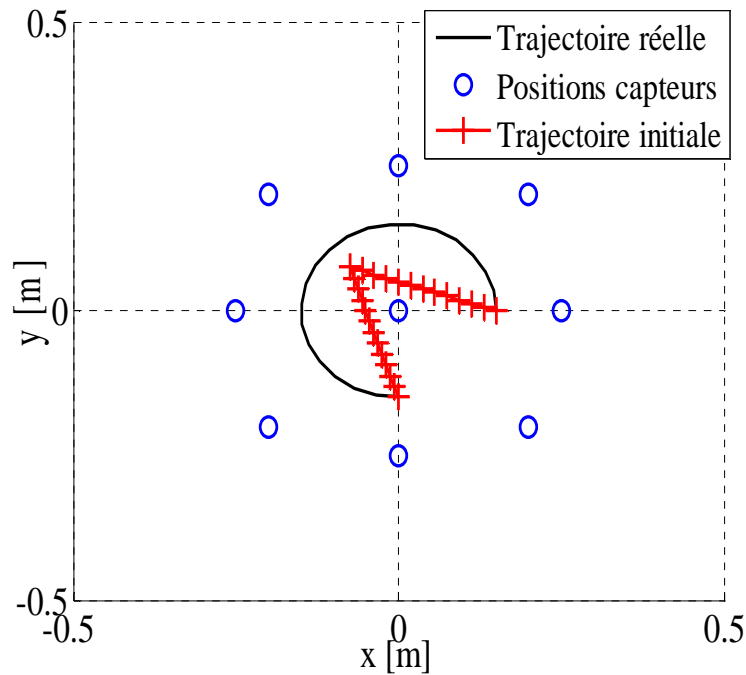


Figure 2.27. Initialisation de la trajectoire.

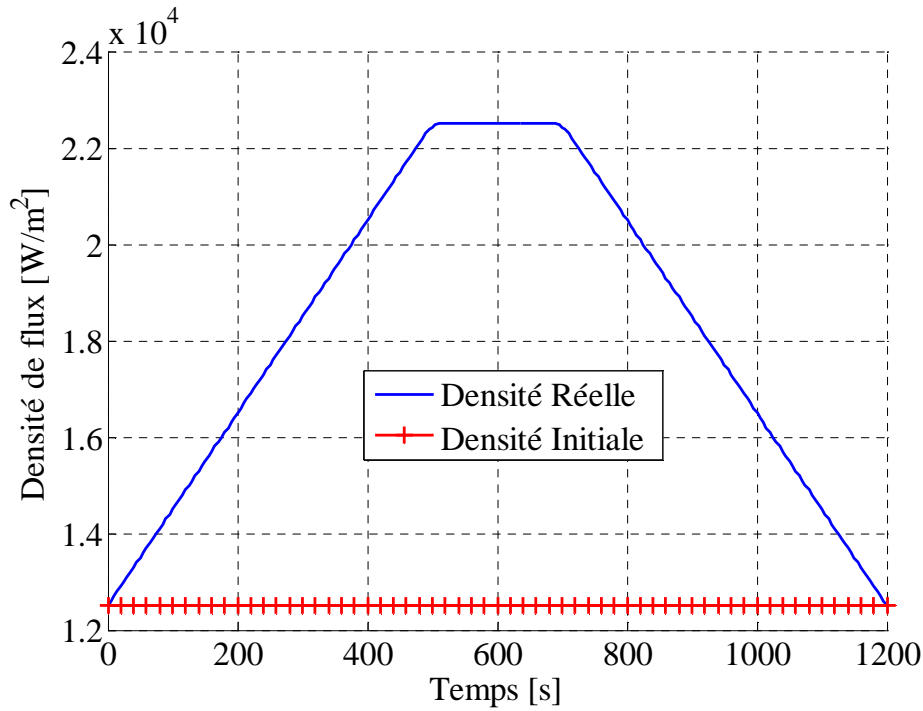


Figure 2.28. Initialisation de la densité de flux.

La méthode de régularisation itérative du gradient conjugué hors ligne est mise en œuvre afin d'identifier la densité de flux ainsi que la trajectoire de la source mobile à partir de données numériques bruitées ($\mathcal{N}(0,0.5)$) aux 9 capteurs présentés Figure 2.27. Les valeurs de la fonction coût en fonction des itérations sont présentées (Tableau 2.12).

Tableau 2.12. Valeurs du critère pour plusieurs itérations.

Itérations	1	5	10	15	20	25	30	35
Valeurs de J	5798695	2179519	543074	202977	57537	23596	8097	3783

Itérations	40	45	50	56
Valeurs de J	2183	1705	1512	1343

La procédure d'identification a convergé en 2 heures et 38 minutes avec un critère d'arrêt

$$J_{stop} = \frac{1}{2} N_c N_t \sigma^2 = 1351.$$

Les résultats de la procédure d'estimation paramétrique sont représentés Figures 2.29 et 2.30. Les résidus de température entre les données réelles et simulées ont été calculés et sont portés dans le Tableau 2.13.

Tableau 2.13. Résidus de température.

	moyenne des résidus (K)	écart type moyen des résidus (K)
Capteurs $C_{j=(1,\dots,9)}$	-0.052	0.52

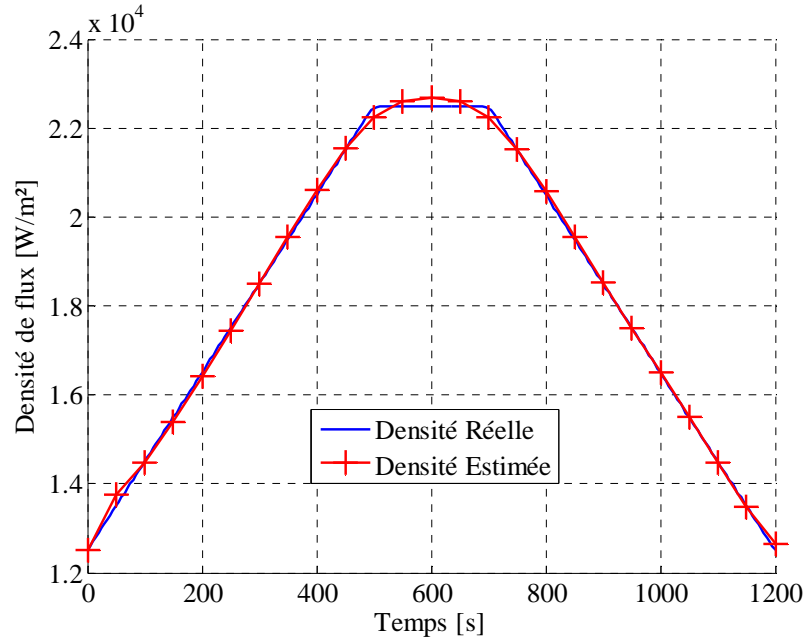


Figure 2.29 : Estimation de la densité de flux à la fin de la procédure d'identification.

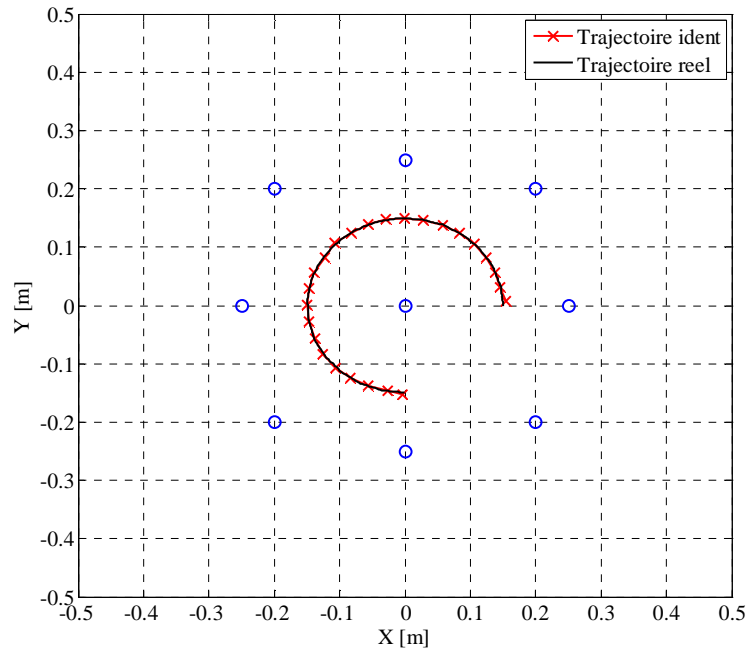


Figure 2.30. Estimation de la trajectoire de la source à la fin de la procédure d'identification.

Les résultats précédemment présentés mettent en évidence l'efficacité de la méthode d'identification hors ligne par la méthode du gradient conjugué : les paramètres inconnus associés à ce système sont correctement estimés. Cependant, les résultats ont été obtenus 2 heures et 38 minutes après la fin de l'acquisition des données. Dans le paragraphe suivant, l'estimation de ces paramètres inconnus va être réalisée avec une méthode d'estimation en ligne (La méthode MGC-EL-PA).

2.3.2. Estimation par la méthode du gradient conjugué en ligne (MGC-EL-PA).

Dans ce paragraphe, une estimation en ligne de la densité et de la trajectoire de la source mobile est réalisée dans le but de réduire le temps nécessaire pour l'obtention des valeurs de ces paramètres inconnus. Comme présentée dans la section 1 de ce chapitre la méthode la plus intéressante pour une estimation en ligne basée sur l'algorithme du gradient conjugué est la méthode du gradient conjugué en ligne, prédictive avec taille de fenêtre adaptative (MGC-EL-PA \Leftrightarrow Stratégie n°6). L'avantage de cette méthode réside en une optimisation de l'estimation en ligne des paramètres inconnus sur les prochaines fenêtres avec une prédiction de ces valeurs. De plus la taille de la fenêtre est automatique.

La résolution hors ligne présentée précédemment présentait une initialisation particulière de la trajectoire de la source mobile. En effet, il était considéré que la position de la source à $t = 0$ et $t = t_f$ était supposée connue. L'estimation présentée dans ce paragraphe repose elle sur la seule connaissance de la position de la source à $t = 0$. De ce fait, l'initialisation de la trajectoire est différente (voir Figure 2.31) de celle présentée avec la méthode hors ligne. La

densité de flux de chauffe $\phi_s(t) = \sum_{i=1}^{N_t} \phi_s^i s^i(t) = (\overline{\phi_s})^{tr} \overline{s(t)}$ et les coordonnées de la trajectoire du

disque de chauffe de la source mobile $x_s(t) = \sum_{i=1}^{N_t} x_s^i s^i(t) = (\overline{x_s})^{tr} \overline{s(t)}$ et

$y_s(t) = \sum_{i=1}^{N_t} y_s^i s^i(t) = (\overline{y_s})^{tr} \overline{s(t)}$ sont discrétisées toutes les 20 secondes.

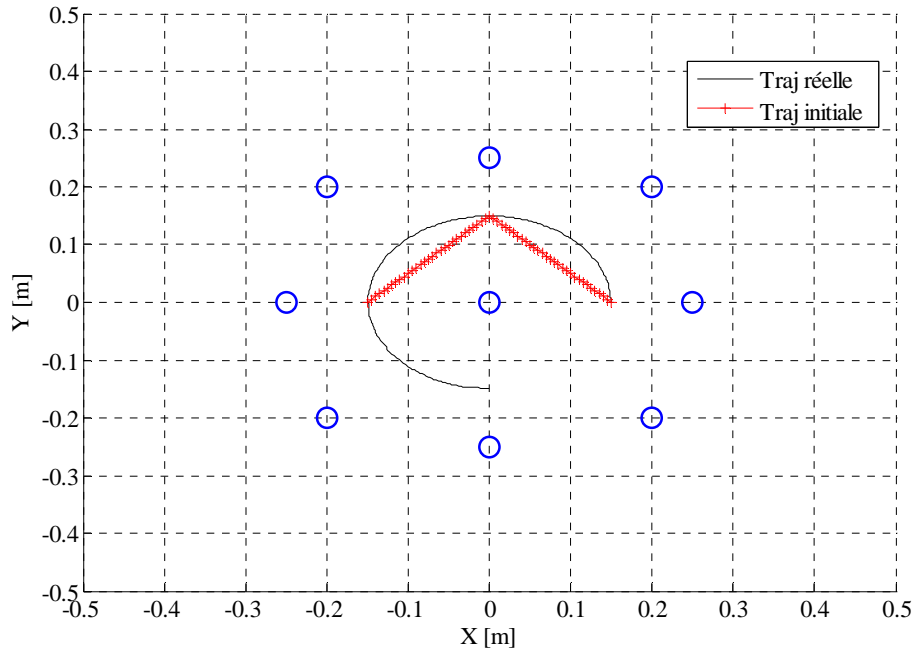


Figure 2.31. Initialisation de la trajectoire (MGC-EL-PA).

La MGC-EL-PA a donc été mise en place pour l'estimation des paramètres inconnus associés à l'étude de ce système. Les résultats sur les résidus de température ainsi que sur la moyenne des retards à l'identification sont présentés ci-dessous :

- Moyenne des résidus de température (voir Figure 2.34) : -0,080 K
- Ecart type des résidus de température (voir Figure 2.34) : 0,52 K
- Retard moyen sur l'identification (voir Figure 2.35) : 1 minute et 42 secondes
- Temps d'identification globale (voir Figure 2.34) : 21 minutes et 26 secondes

Les figures présentant l'estimation de la trajectoire et de la densité de la source chauffante et le retard à l'identification avec cette méthode en ligne sont proposées dans les figures ci-dessous :

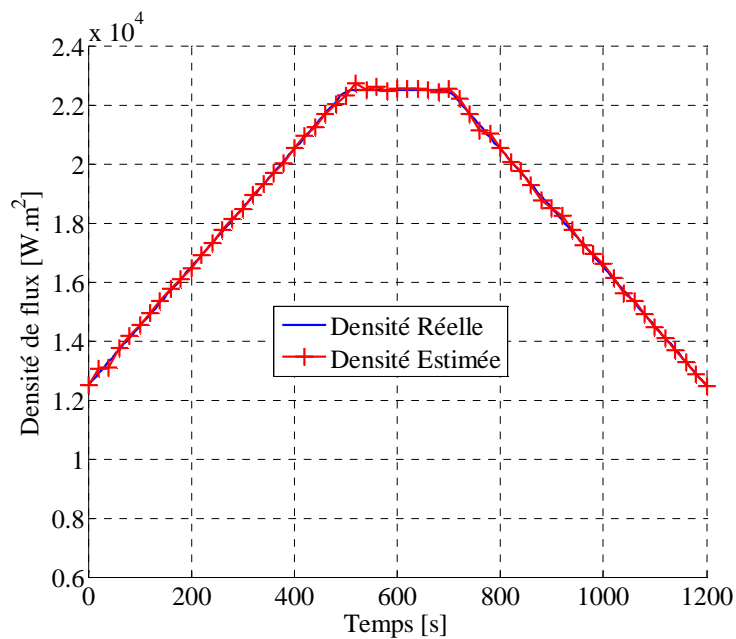


Figure 2.32. Estimation de la densité de flux à la fin de la procédure d'identification en ligne (MGC-EL-PA).

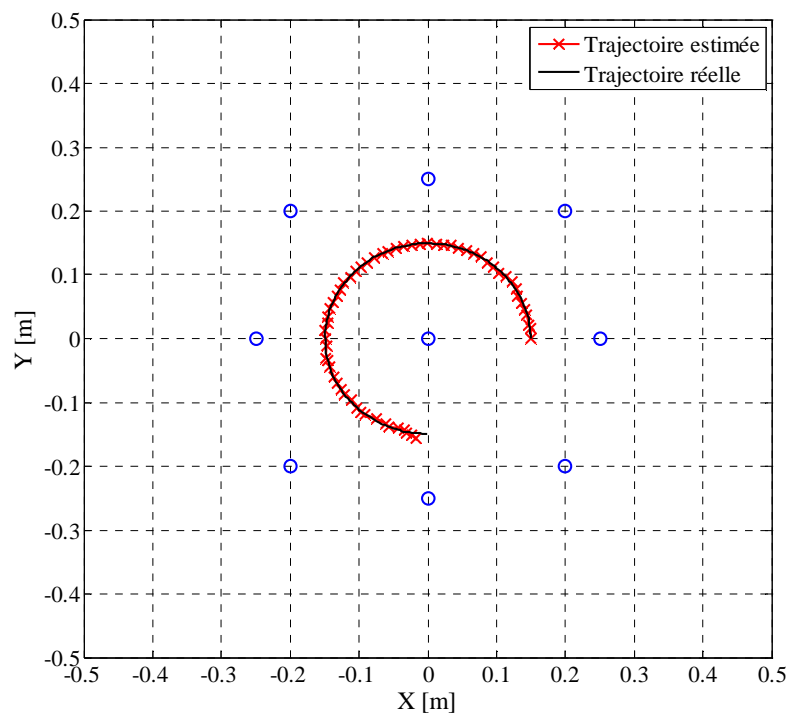


Figure 2.33. Estimation de la trajectoire de la source à la fin de la procédure d'identification en ligne (MGC-EL-PA).

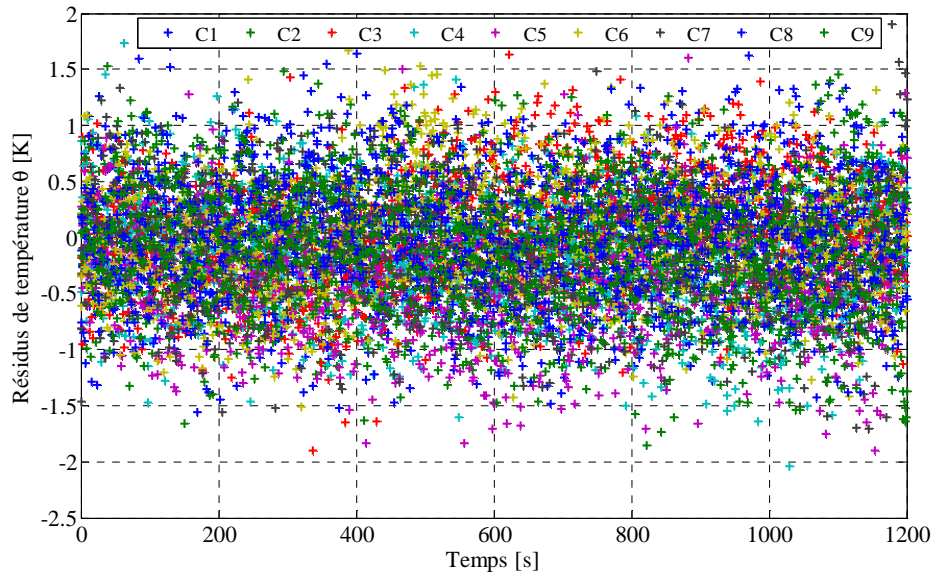


Figure 2.34. Résidus de température (MGC-EL-PA).

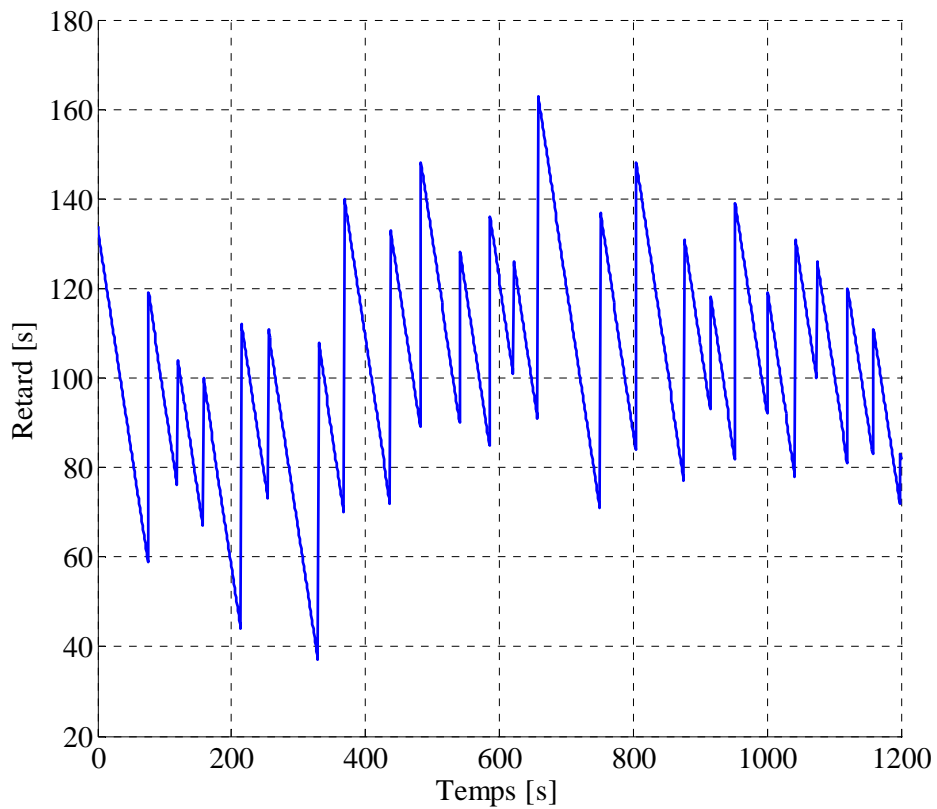


Figure 2.35. Retard entre les mesures et les résultats d'identification avec la stratégie (MGC-EL-PA).

Les résultats présentés avec la méthode en ligne MGC-EL-PA dans cette étude présentent l'intérêt de ces méthodes de résolution quasi en ligne. En effet les estimations des paramètres

inconnus sont très satisfaisantes et d'une qualité similaire à une méthode de résolution hors ligne.

Afin d'illustrer le comportement de la méthode d'estimation en ligne, plusieurs estimations du flux et de la trajectoire de la source mobile pour les premières fenêtres d'estimation sont représentées dans les Figures 2.36 à 2.38.

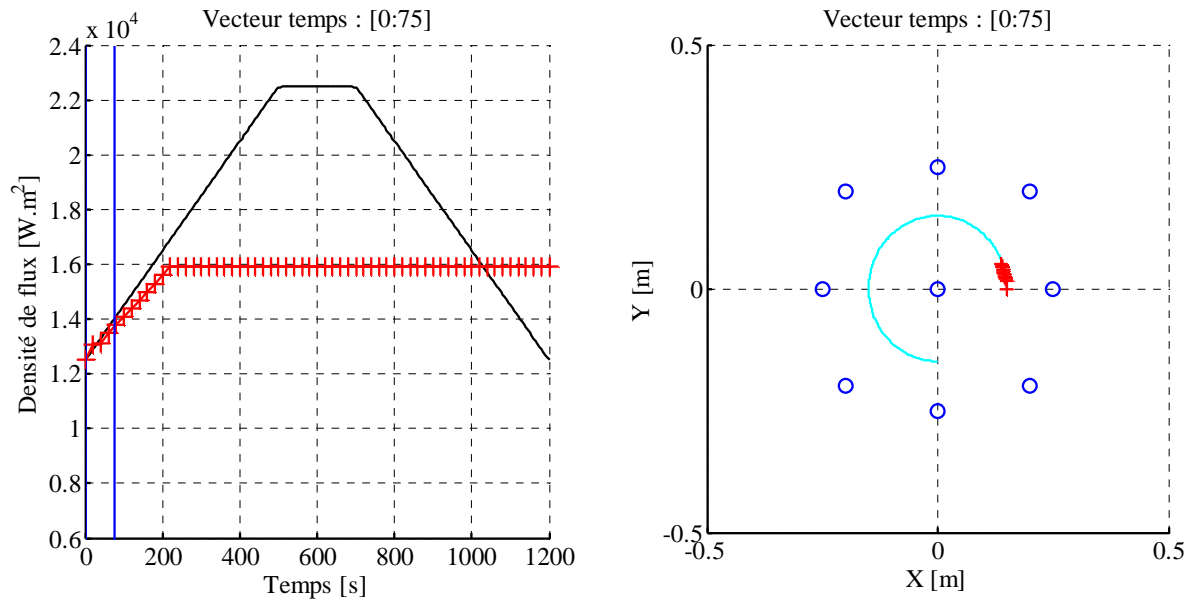


Figure 2.36. Présentation de l'estimation de la densité de flux et de la trajectoire de la source chauffante mobile pour l'intervalle de temps [0 :75].

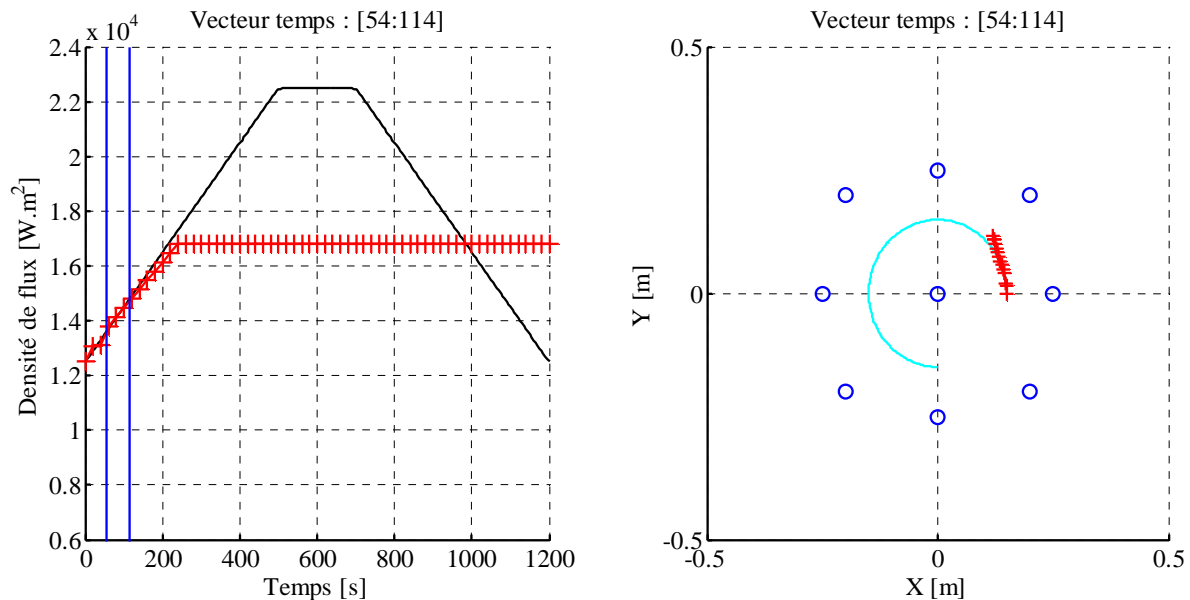


Figure 2.37. Présentation de l'estimation de la densité de flux et de la trajectoire de la source chauffante mobile pour l'intervalle de temps [54 :114].

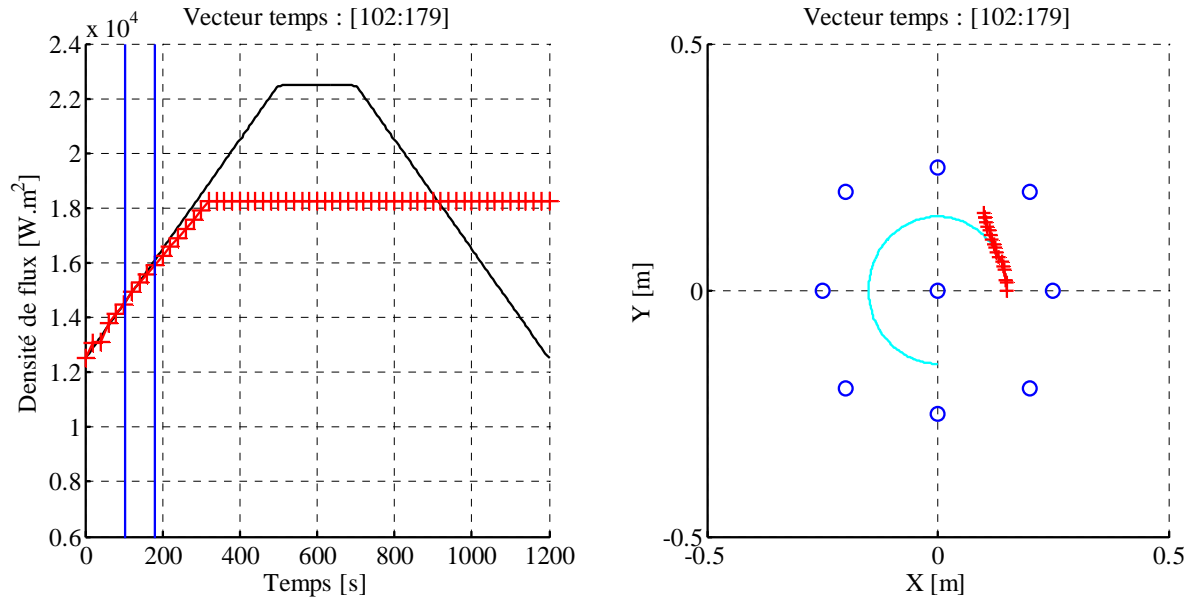


Figure 2.38. Présentation de l'estimation de la densité de flux et de la trajectoire de la source chauffante mobile pour l'intervalle de temps [102 :179].

2.4. Bilan.

Dans cette partie, une identification quasi en ligne de la densité de flux thermique ainsi que la trajectoire d'une source mobile chauffante a été présentée. La comparaison entre les résultats obtenus avec une méthode hors ligne usuellement utilisée et une méthode en ligne mettent en évidence la pertinence et l'efficacité de cette dernière méthode. En effet, les résultats d'estimation des paramètres inconnus avec une méthode en ligne sont obtenus au bout de 86 secondes après la fin de la campagne de mesure alors que la méthode hors ligne donne une estimation de ces paramètres au bout de 2 heures et 38 minutes de résolution. Compte tenu des résultats sur les résidus de température, la méthode en ligne pour l'estimation de la densité de flux et la trajectoire peut être une alternative intéressante lorsque l'identification est utilisée à des fins de contrôle ou de diagnostic. Toutefois, la dynamique du système étudié peut s'avérer être une limitation à cette méthode. En effet, lorsque la dynamique des paramètres estimés est très rapide, le retard entre l'estimation et l'acquisition des mesures s'accroît avec le temps.

3. Bilan du chapitre.

Dans ce chapitre, une présentation de différentes stratégies d'estimation en ligne de paramètres inconnus avec une adaptation de la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué a été présentée. Les résultats présentés dans la première partie portant sur l'estimation de la densité de flux de deux sources chauffantes mobiles ont mis en évidence l'efficacité de la méthode de résolution en ligne. La stratégie 6, présentée en 1.3.4.2 visant un choix automatique de la largeur de la fenêtre d'identification et se décalant de manière adaptative sur l'horizon temporel des mesures s'avère être une stratégie intéressante pour l'estimation quasi en ligne de paramètres inconnus. De plus considérant les résultats obtenus avec cette méthode pour l'estimation en ligne de la densité et de la trajectoire d'une source mobile chauffante présentée dans la seconde partie de ce chapitre, cette stratégie s'avère être une stratégie optimale pour l'estimation en ligne (s'affranchissant ainsi du choix de la taille de fenêtre d'identification).

Dans les études présentées dans les deux premiers chapitres, les capteurs utilisés ont été placés de manière à être sensibles aux élévations de température. Le prochain chapitre s'intéresse à proposer plusieurs méthodes pour s'affranchir de la problématique du placement optimal de capteurs (choix de capteurs dans un réseau fixe et déploiement adaptatif de capteurs mobiles).

Chapitre 3.

Stratégies d'observations.

Sommaire

1. Placement optimal de capteurs	108
1.1. Stratégies de placement optimal de capteurs	109
1.2. Stratégies de choix de capteurs.....	110
1.3. Stratégies avec capteurs mobiles	110
1.4. Bilan.	111
2. Choix de capteurs dans un réseau fixe	112
2.1. Présentation du système étudié.....	113
2.2. Problème inverse	116
2.3. Résultats numériques.....	118
2.4. Bilan	132
3. Déploiement adaptatif de capteurs mobiles	133
3.1. Présentation du système étudié.....	133
3.2. Problème inverse	135
3.3. Stratégies de déploiement de capteurs	139
3.4. Bilan	157
4. Bilan du chapitre	159

1. Placement optimal de capteurs

Dans le chapitre précédent, une adaptation de la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué a été présentée afin de résoudre un problème inverse en ligne. L'un des problèmes majeurs lors de la résolution de problèmes inverses et notamment dans l'estimation de paramètres inconnus réside dans le placement des capteurs utilisés. En effet, le choix de l'emplacement et le nombre de capteurs influencent directement les résultats et la rapidité de convergence des algorithmes de résolution. Compte tenu des bruits de mesures, un capteur situé à un emplacement non adéquat apporte plus de bruits inutiles que d'informations pertinentes.

Dans ce contexte, trois grandes thématiques sont explorées dans la littérature afin de définir le placement optimal de capteurs en considérant les problématiques suivantes :

- Le placement de capteurs fixes : comment déterminer un placement optimal de capteurs dans le domaine spatial ? : récemment (Alaña, 2010), (Weickgenannt, et al., 2013), (Mu, et al., 2014)
- L'utilisation d'une sélection de capteurs parmi un ensemble disponible à un certain moment : comment choisir le meilleur sous-ensemble de capteurs parmi l'ensemble disponibles pour effectuer des mesures sur un temps donné ? : (Demetriou, 2000), (Demetriou, et al., 2003), (Lou & Christofides, 2003)
- L'utilisation de capteurs mobiles : comment concevoir des trajectoires optimales de capteurs ? : (Cassandras & Li, 2005), (Chen & Tricaud, 2008),

De plus, la question du choix du nombre de capteurs minimal afin de garantir une bonne estimation des paramètres recherchés est posée. Dans la section suivante, une présentation des différentes stratégies utilisées dans la littérature est proposée. Cet état de l'art s'inspire essentiellement des travaux de (Ucinski, 2005), (Song, et al., 2007) et (Patan, 2012).

1.1. Stratégies de placement optimal de capteurs

Les stratégies basées sur le placement optimal de capteurs reposent sur des observations relevées à des positions fixes dans le domaine spatial. Le problème rencontré réside sur le positionnement optimal de ces capteurs afin qu'ils apportent suffisamment d'informations sur le procédé. Pour la plupart des stratégies, les mesures sont moyennées sur le domaine temporel.

Un grand nombre de travaux ont été réalisés sur le placement optimal de capteurs. Cependant une grande partie des œuvres portent sur l'estimation d'état (Kubrusly & Malebranche, 1985), (El Jai & Pritchard, 1988), (El Jai, 1991) et plus récemment (Alaña, 2010), (Weickgenannt, et al., 2013), (Mu, et al., 2014). Un traitement exhaustif des aspects tant théoriques que numériques des stratégies de placement de capteurs résultantes est présenté dans (Alaña & Theodoropoulos, 2011).

Néanmoins, le placement optimal de capteurs pour l'identification paramétrique est aussi étudié du fait de sa grande attractivité en termes d'applications concrètes. Les différentes méthodes existantes peuvent être classées en deux groupes.

Les méthodes conduisant à une estimation d'état :

Ces méthodes s'intéressent à la transformation du problème d'estimation paramétrique en un problème d'estimation d'état et permet ainsi d'utiliser des méthodes bien connues pour le placement optimal de capteur pour l'estimation d'état (Alaña & Theodoropoulos, 2011), (Weickgenannt, et al., 2013). L'inconvénient principal de ces méthodes apparaît lorsque l'estimation d'état du système et l'estimation paramétrique sont réalisées simultanément. Dans la plupart des cas, un tel problème est non linéaire.

Les méthodes de conception optimale d'expérimentation :

Ces méthodes s'intègrent dans la théorie de conception optimale d'expérimentation. Plusieurs travaux se réfèrent à ces méthodes (Kiefer & Wolfowitz, 1959), (Fedorov, 1972), (Fedorov & Hackl, 1997). Les critères d'optimisation adoptés sont en général basés sur la matrice d'information de Fisher (FIM) associée aux paramètres à identifier. L'idée sous-jacente est d'exprimer la validité des paramètres estimés considérant la matrice de covariance des évaluations. Pour identifier des placements optimaux de capteurs, on suppose qu'un estimateur sans biais est mis en œuvre. Cela mène à une grande simplification puisque la

borne de Cramér-Rao de la matrice de covariance est l'inverse de la FIM, qui peut être calculée relativement facilement, bien que la matrice de covariance exacte d'un estimateur donné soit délicate à obtenir. Fedorov a réalisé des travaux basés sur cette approche au début des années 1970 (Fedorov, 1972). Cette méthodologie a été considérablement développée pour l'étendre à divers champs applicatifs. Un traitement exhaustif des aspects tant théoriques que numériques des stratégies de placement de capteur résultantes est présenté dans (Ucinski, 2005).

Pour évaluer les paramètres, l'estimateur du maximum de vraisemblance (ML) peut être utilisé. En raison du caractère non-linéaire inhérent à cette optimisation, des techniques numériques spécifiques doivent être employées.

1.2. Stratégies de choix de capteurs.

Ces stratégies sont des extensions des stratégies de placement optimal de capteurs. Avec les progrès techniques de ces dernières années sur les technologies de réseau sans fil, la miniaturisation des capteurs ainsi que la baisse des prix, les réseaux de capteurs deviennent de plus en plus attractifs. Ainsi de nouvelles stratégies de placement optimal de capteurs sont apparues. Ces stratégies sont basées sur un nombre élevé de capteurs dont les positions sont déjà spécifiées. L'évolution apportée par ces méthodes consiste à activer seulement une sous partie de l'ensemble global des capteurs au cours d'un intervalle de temps donné, tandis que les autres capteurs restent dormants. Le principal inconvénient est le choix de l'ordonnancement des activations et des désactivations des capteurs disponibles en fonction du temps. Le lecteur est invité à se référer à (Demetriou, 2000), (Demetriou, et al., 2003), (Lou & Christofides, 2003) pour plus de détails sur ces méthodes.

1.3. Stratégies avec capteurs mobiles

Les stratégies basées sur l'utilisation de capteurs mobiles sont les plus intéressantes et les plus complexes (Cassandras & Li, 2005) par rapport à une configuration avec capteurs fixes. En effet, l'utilisation de capteurs mobiles permet d'augmenter l'optimalité sur le système d'observation. De ce fait il est alors possible de récolter des informations à des positions variables au cours du temps, permettant ainsi d'avoir un indice de performance meilleur sur les paramètres à estimer.

Dans ce dernier cas, même si la complexité du problème d'optimisation résultant est plus grande, il peut s'avérer intéressant que les capteurs soient capables de suivre à la trace les

points qui fournissent à un instant donné les informations les plus pertinentes. Par conséquent, en reconfigurant en temps réel un système de capteurs (en le déplaçant) nous pouvons nous attendre à obtenir un critère d'optimalité meilleur que celui du cas stationnaire.

De plus, il est possible de considérer que des capteurs fixes peuvent être des capteurs mobiles dont les trajectoires sont fixes au cours du temps. L'utilisation de capteurs mobiles constitue donc une généralisation de l'utilisation de capteurs fixes.

L'utilisation de capteurs mobiles pour l'estimation paramétrique a fait l'objet de plusieurs travaux. Portant sur des méthodes utilisant la conception optimale d'expérimentation, l'idée de généralisation des méthodes de conception optimale d'expériences pour l'identification de paramètres inconnus des systèmes a aussi été utilisée pour résoudre le problème de la mesure optimale pour le déplacement des capteurs (Rafajlowicz & Myszka, 1986).

Plus récemment, (Chen & Tricaud, 2008) présentent une méthode de planification de trajectoire se basant sur la matrice d'information de Fisher en utilisant la D-optimalité pour l'estimation de paramètres inconnus. L'idée est de considérer un point nominal pour l'initialisation du paramètre et d'estimer les valeurs de ce paramètre. Plusieurs travaux ont été réalisés à partir de la conception optimale d'expériences pour l'estimation paramétrique de systèmes (Tricaud & Chen, 2010), (Tricaud & Chen, 2012), (Patan, 2012).

Dans (Ucinski & Korbicz, 1999), (Ucinski, 2000a), (Ucinski, 2000b) et (Ucinski, 2001), plusieurs algorithmes basés sur la FIM ont été proposés. Le problème est alors réduit à un problème de contrôle optimal à état contraint dont les solutions sont obtenues via des méthodes de gradients capables de gérer les différentes contraintes imposées sur les trajectoires de capteurs. Un problème optimal en temps pour le déplacement de capteurs observant l'état du Système à Paramètres Distribués (SPD) et l'estimation de certains paramètres a été développé dans (Ucinski & Chen, 2005). Le déplacement de capteurs a aussi été étudié pour l'estimation d'état dans (Carotenuto, et al., 1987), (Khapalov, 1992), (Nakano & Sagara, 1988).

1.4. Bilan.

Les perspectives de recherche proposées dans l'ouvrage de (Patan, 2012) présentent la problématique concernant l'estimation paramétrique et la conception optimale en simultanée. En effet, la majorité des travaux proposés actuellement s'intéressent à la mise en œuvre de stratégies de répartition de capteur avant d'effectuer l'expérimentation. D'un point de vue

pratique, il serait intéressant d'étudier le problème de récolter simultanément des mesures, de réaliser l'estimation des paramètres et de mettre à jour l'emplacement des capteurs.

C'est dans cet objectif qu'une méthode permettant d'estimer des paramètres inconnus et de gérer un placement mobile de capteurs a été développée, voir section 3 de ce chapitre.

2. Choix de capteurs dans un réseau fixe

Cette section est dédiée à la présentation d'une nouvelle méthode pour le choix de capteurs parmi un réseau fixe permettant l'estimation paramétrique en ligne sur des systèmes régis par des EDPs. La méthode présentée ci-dessous vise à réaliser une sélection de capteurs en utilisant les solutions fournies lors de l'estimation paramétrique via la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué.

Le placement des observateurs est primordial pour une résolution d'un problème inverse qui serait impossible si le placement est inadapté. Dans le contexte de la résolution quasi en ligne d'un problème de conduction inverse dans un domaine plan 2D via des mesures de température, le choix du placement optimal de capteurs sur le système étudié peut s'avérer une tâche ardue. Dans l'objectif d'apporter une contribution à cette problématique, la situation traitée ci-dessous concerne l'estimation de la densité de flux d'une source chauffante mobile non ponctuelle tout en sélectionnant les capteurs les plus efficaces parmi un réseau fixe sur une géométrie plane 2D.

Dans un premier temps, le système étudié sera présenté et l'identification de la densité de flux de la source mobile sera réalisée une fois toutes les données expérimentales obtenues comme base de comparaison. Puis la stratégie de choix de capteurs pertinents parmi un réseau fixe sera présentée et appliquée à une adaptation en ligne de la méthode du gradient conjugué permettant une estimation de paramètres inconnus au cours de la phase d'acquisition des mesures (le principe a été proposé dans le chapitre 2).

2.1. Présentation du système étudié

Considérons une source mobile chauffante S_1 évoluant sur une plaque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = (L \times l)$, de frontière $\partial\Omega \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur e suffisamment petite pour négliger les transferts en son sein (Figure 3.1). Considérons que la densité de flux de chaleur ϕ_1 pour cette source est uniforme sur un disque mobile $D_1(I_1, r_1)$ de centre $I_1(x_1, y_1)$ et de rayon r_1 .

Le flux total peut aussi être exprimé de manière continue et dérivable tel que :

$$\Phi(x, y; t) = \frac{\phi_1(t)}{\pi} \left(-\arctan \left(\mu \left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - r_1 \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.1)$$

Un paramètre de régularisation $\mu \in \mathbb{R}^+$ a été choisi de manière à décrire la discontinuité des flux de chauffe. L'intervalle de temps $[0, t_f]$ peut être divisé en N_t segments et défini à l'aide de fonctions linéaires continues par morceaux : $[0, t_f] = \bigcup_{i=0}^{N_t} [t_i, t_{i+1}]$ avec $t_i = i\tau$ et un pas de discrétisation défini par $\tau = \frac{t_f}{N_t + 1}$. Ces fonctions peuvent alors s'écrire

$$s_i(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau} - i + 1 & \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i] \\ -\frac{t}{\tau} + i + 1 & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et il vient } \phi_1(t) = \sum_{i=1}^{N_t} \phi_1^i s_i(t). \text{ Ainsi, la distribution spatio-}$$

temporelle de température au sein du domaine $\theta(x, y; t)$ est solution du système d'équations aux dérivées partielles (3.2) considérant les paramètres indiqués dans le tableau 3.1.

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y; t) = \frac{\Phi(x, y; t) - 2h(\theta(x, y; t) - \theta_0)}{e} & \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \theta(x, y; 0) = \theta_0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial n} = 0 & \forall (x, y; t) \in \partial\Omega \times [0, t_f] \end{cases} \quad (3.2)$$

La densité de flux de la source mobile suit l'évolution temporelle représentée (Figure 3.2) et les évolutions de températures au niveau des 16 capteurs sont présentées (Figure 3.3). Les propriétés thermiques du système sont considérées constantes au cours de l'expérience. La résolution numérique réalisée dans ce mémoire utilise la méthode des éléments finis du logiciel Comsol® interfacé avec Matlab®.

Tableau 3.1. Paramètres du modèle.

$\rho c \text{ (J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}\text{)}$	$h \text{ (W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}\text{)}$	$t_f \text{ (s)}$	$\lambda \text{ (W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}\text{)}$	$\theta_0 \text{ (K)}$
$2.43.10^6$	10	600	160	291
$r_1 \text{ (m)}$	$e \text{ (m)}$	$L \text{ (m)}$	$l \text{ (m)}$	
6.10^{-2}	2.10^{-3}	1	1	

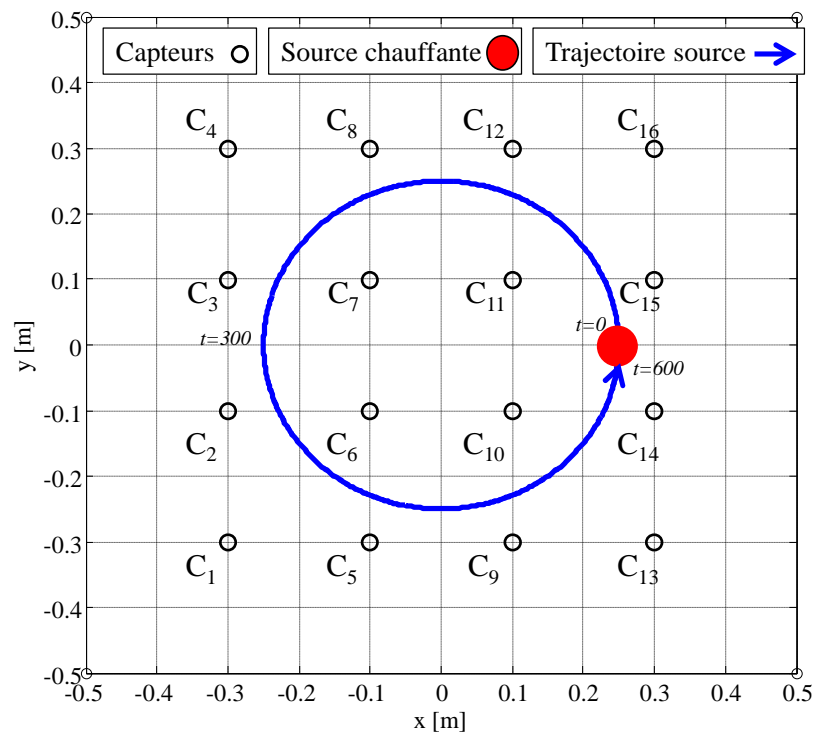


Figure 3.1. Modélisation du problème direct.

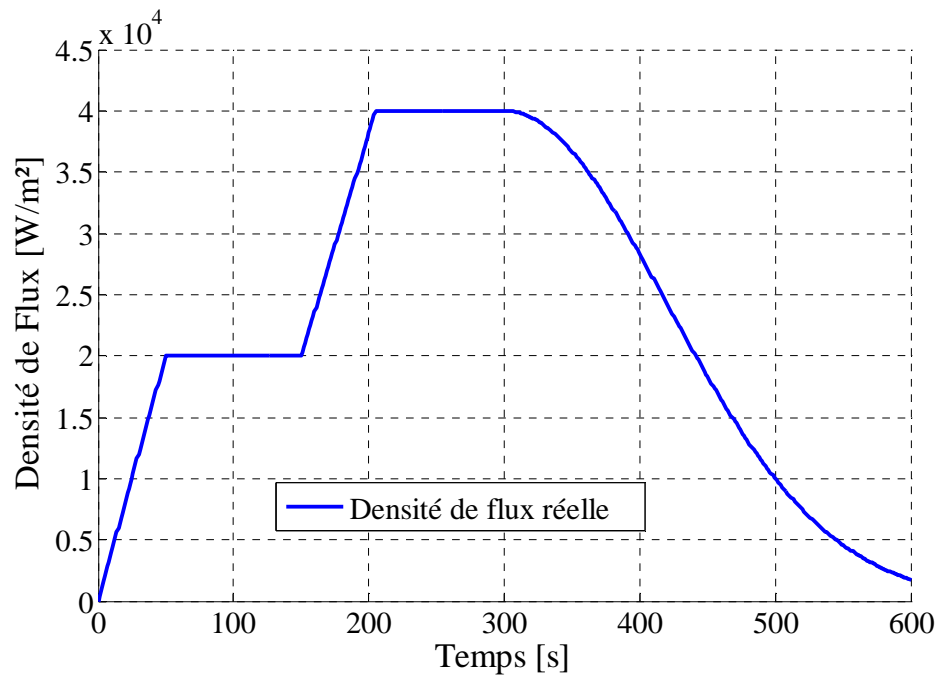


Figure 3.2. Densité de flux réel.

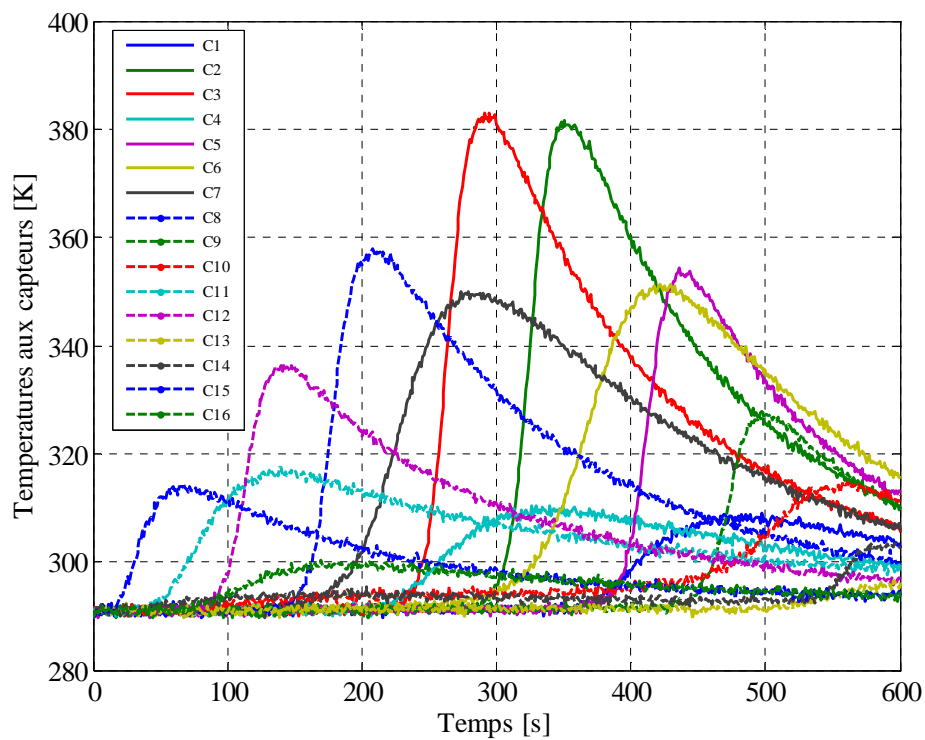


Figure 3.3. Evolution de la température aux 16 capteurs avec la densité de flux réel.

2.2. Problème inverse

2.2.1. Formulation

Afin d'identifier les valeurs de la densité de flux $\bar{\phi}_1(t)$ à partir des évolutions de températures $\theta_i(t)$ issues des capteurs C_i ($i=1,2,...,16$) placés sur la plaque un problème inverse peut être formulé. Sa résolution consiste à minimiser le critère suivant :

$$J(\theta, \bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^{t_f} \left(\theta(C_i, t; \bar{\Phi}) - \hat{\theta}_i(t) \right)^2 dt \quad (3.3)$$

Une méthode de régularisation itérative de gradient conjugué a été mise en œuvre pour identifier les paramètres inconnus. L'algorithme de cette méthode consiste à résoudre trois problèmes bien posés au sens d'Hadamard : un problème direct (3.2) afin de calculer le critère $J(\theta, \bar{\Phi})$ (3.3) et juger de la qualité des estimations ; un problème adjoint pour déterminer le gradient de la fonction coût et définir la direction de descente et un problème de sensibilité pour calculer la profondeur de descente (dans la direction de descente). Le détail de l'algorithme est proposé par (Perez, et al., 2008).

2.2.2. Problème de sensibilité

Considérons $\delta\theta(x, y; t)$ la variation de température induite par une variation de la densité du flux de chauffe $\phi_1(t)$. $\delta\theta(x, y; t)$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \delta\theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \delta\theta(x, y; t) = \frac{\delta\Phi(x, y; t) - 2h\delta\theta(x, y; t)}{e} & \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \delta\theta(x, y; 0) = 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \delta\theta(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 & \forall (x, y; t) \in \partial\Omega \times [0, t_f] \end{cases} \quad (3.4)$$

Avec

$$\delta\Phi(x, y; t) = \sum_{i=1}^{N_f=41} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi_1} \delta\phi_1 = \frac{\delta\phi_1}{\pi} \left(-\arctan \left(\mu \left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - r \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.5)$$

La solution $\delta\theta(x, y; t)$ du problème de sensibilité permet ainsi de calculer la profondeur de descente pour chaque itération k telle que :

$$\gamma^k = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(C_i, t; \Phi^k) - \hat{\theta}_i(t) \right) \delta\theta(C_i, t; \Phi^k) dt}{\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left[\delta\theta(C_i, t; \Phi^k) \right]^2 dt} \quad (3.6)$$

2.2.3. Problème adjoint

Afin de déterminer le gradient de la fonctionnelle $\nabla J^n = \left(\frac{\partial J}{\partial \Phi^i} \right)_{i=(1, \dots, N_t)}$ à chaque itération de

l'algorithme de minimisation, une formulation Lagrangienne $\ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)$ est introduite telle que :

$$\ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi) = J(\theta, \Phi) + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[\begin{array}{c} \rho c \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y; t) \\ \Phi(x, y; t) - 2h(\theta(x, y; t) - \theta_0) \\ - \frac{\quad}{e} \end{array} \right] \psi dt d\Omega \quad (3.7)$$

La variation du Lagrangien peut s'écrire telle que :

$$\delta \ell(\theta(x, y; t), \phi_1, \phi_2, \psi) = \frac{\partial \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)}{\partial \theta(x, y; t)} \delta \theta + \frac{\partial \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)}{\partial \psi} \delta \psi$$

Lorsque $\psi(x, y; t)$ est fixé, lorsque les équations adjointes sont vérifiées et considérant

$\theta(x, y; t)$ solution du problème direct alors il résulte que :

$$\delta \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi) = \frac{\partial \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi)}{\partial \Phi} \delta \Phi = \delta J(\theta, \Phi)$$

Ainsi la variation Lagrangienne peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta \ell(\theta(x, y; t), \Phi, \psi) &= \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(x_i, y_i; t; \bar{\Phi}) - \hat{\theta}_i(x_i, y_i; t) \right) \delta \theta(x_i, y_i; t) dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[\rho c \frac{\partial \delta \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \delta \theta(x, y; t) - \frac{\delta \Phi - 2h(\delta \theta(x, y; t))}{e} \right] \psi(x, y; t) dt d\Omega \end{aligned}$$

Considérant les équations du problème de sensibilité, $\psi(x, y; t)$ est solution du problème

(3.8) :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial t} + \lambda \Delta \psi(x, y; t) = E(x, y; t) + \frac{2h\psi(x, y; t)}{e} & \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \psi(x, y; 0) = 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 & \forall (x, y; t) \in \partial\Omega \times [0, t_f] \end{cases} \quad (3.8)$$

Avec $E(x, y; t) = \sum_{i=1}^{N_c} (\theta(x_i, y_i; t; \bar{\Phi}) - \hat{\theta}_i(x_i, y_i; t)) \delta_D(x - x_i) \delta_D(y - y_i)$ et $\delta_D(x - x_i) \delta_D(y - y_i)$

la distribution de Dirac au capteur $C_i(x_i, y_i)$.

Lorsque $\psi(x, y; t)$ est solution du problème (3.8) alors : $\delta J(\theta, \Phi) = - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[\frac{\delta \Phi \psi}{e} \right] d\Omega dt$ et

la discrétisation temporelle du flux de chauffe peut s'écrire :

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \delta \phi_i \frac{s_i(t)}{\pi} \left(-\arctan \left(\mu \left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - r \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.9)$$

Ainsi le gradient s'exprime donc par :

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_i} = - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \frac{s_i(t)}{\pi} \left(-\arctan \left(\mu \left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - r \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \left[\frac{\psi}{e} \right] d\Omega dt \quad (3.10)$$

2.3. Résultats numériques

2.3.1. Méthode du gradient conjugué Hors-ligne

La méthode de régularisation itérative du gradient conjugué est mise en œuvre afin d'estimer la densité de flux de la source mobile à partir des données bruitées $\mathcal{N}(0, 0.5)$ aux 16 capteurs présents sur la plaque. La densité de flux initiale a pour valeur $\phi_1(t) = 0 \text{ W.m}^{-2} \forall t$. L'évolution des valeurs du critère à minimiser (3.3) sont présentées (Fig. 3.4).

Cette procédure d'identification a convergé en 52 minutes (ordinateur standard : CPU : Intel® Core™ i7-3520M CPU @ 2.90GHz ; RAM : 8.00 Go ; OS : Windows 7 (64)) avec un critère d'arrêt $J_{stop} = 0.5 N_c N_t \sigma^2$ proposé par (Alifanov, et al., 1995). La densité de flux estimée est représentée en (Fig. 3.5).

Les résidus de température entre les « mesures » et les températures simulées à partir de l'estimation de la densité de flux obtenue avec la procédure d'identification ont été calculés et sont portés en tableau 3.2 :

Tableau 3.2. Résidus de températures avec 16 capteurs utilisés pour estimation.

	moyenne des résidus (K)	écart type moyen des résidus (K)
Pour les capteurs $C_{j=(1,...,16)}$	-0.015	0.49

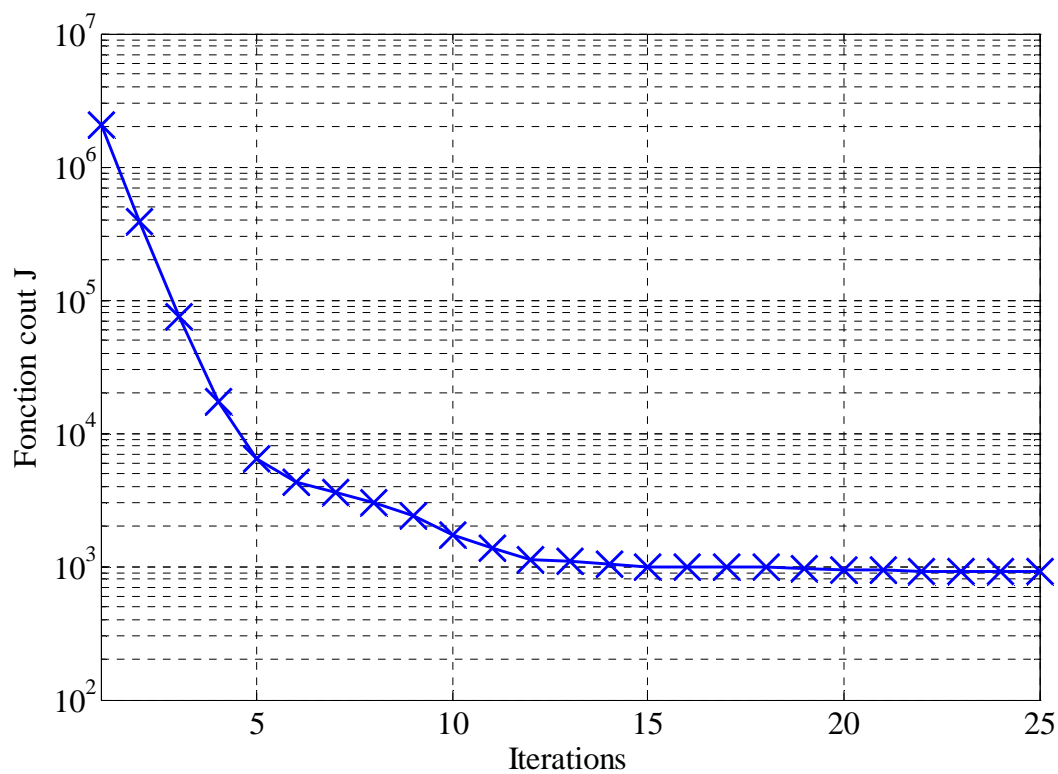


Figure 3.4. Evolution du critère.

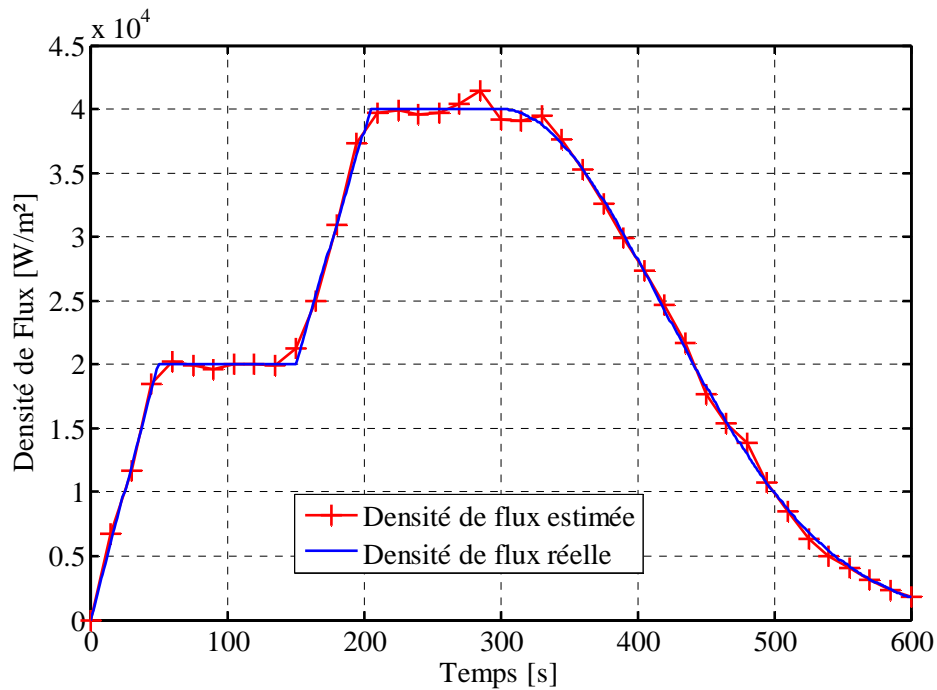


Figure 3.5. Densité de flux identifiée avec 16 capteurs.

L'évolution de la température des 16 capteurs représentés figure 3.3 met en évidence la non pertinence de certains capteurs. Les moyennes, le maximum ainsi que la norme L^2 des évolutions de températures relatives $\bar{\hat{\theta}}_{C_i}$ au niveau de chaque capteur sont calculées et portées en tableau 3.3.

Tableau 3.3 : Moyenne des évolutions de températures aux capteurs.

[K]	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
$\bar{\hat{\theta}}_{C_i}$	5.2	23.5	26.1	8.2	13.5	18.9	24.2	21.7
$\max(\hat{\theta}_{C_i})$	18,0	90,5	91,9	19,4	63,3	60,3	59,0	66,9
$L^2(\hat{\theta}_{C_i})$	213,5	906,8	944,2	267,3	597,1	708,4	771,0	724,2
[K]	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
$\bar{\hat{\theta}}_{C_i}$	6.6	6.14	13.5	15.7	0.6	2.8	8.5	4.6
$\max(\hat{\theta}_{C_i})$	36,9	23,8	26,6	45,5	5,5	12,4	23,3	9,4
$L^2(\hat{\theta}_{C_i})$	329,6	229,3	372,4	495,7	34,0	91,6	259,7	129,6

Les résultats présentés au Tableau 3.3 mettent en évidence que certains capteurs peuvent être écartés du processus d'identification. Cela a pour effet de diminuer le critère $J_{stop} = 0.5N_c N_t \sigma^2$ et ainsi améliorer l'identification considérant une plus grande confiance dans les données relevées (en utilisant le fait que tous les capteurs ont une position pertinente).

Dans la section suivante est présentée une méthode permettant de sélectionner automatiquement et quasi en ligne les capteurs les plus sensibles pour l'identification de la densité de flux.

2.3.2. Stratégie de choix de capteurs

Afin d'estimer la valeur de ce flux de chauffe, 16 capteurs sont répartis de manière régulière (Fig. 3.1). Cette section présente une étude sur le choix des capteurs optimaux.

Considérons $N_{\max} = 16$ le nombre de capteurs à disposition, et N^* le nombre de capteurs utilisés pour identifier le flux de chauffe. N'ayant aucune information a priori sur le placement optimal des capteurs, les informations fournies par la résolution du problème de sensibilité sont utilisées pour définir les capteurs les plus sensibles aux variations de la densité de flux.

Soit $N^* = 12$ (choisi arbitrairement), seuls 12 capteurs parmi 16 seront utilisés lors de la résolution du problème inverse par la MGC. Il s'agit donc d'écarter les 4 capteurs les moins pertinents, dans le cas présent les capteurs les moins sensibles aux variations de température engendrées par une variation de la densité de flux.

A chaque itération de l'algorithme de minimisation, en se basant sur le principe proposé par (Perez, 2013), les N^* capteurs optimaux parmi N_{\max} disponibles sont retenus pour le calcul du critère (problème direct) et le calcul du gradient (problème adjoint) à la prochaine itération avec un choix arbitraire pour la première itération.

L'adaptation proposée par rapport à (Perez, 2013) réside en un découpage des solutions fournies par le problème de sensibilité en $\frac{t_f}{N^*}$ intervalles de temps T_i , utilisés pour le calcul de la norme L^2 soit

$$\left\| \delta \theta_{d^{n+1}}(C_i, t) \right\| = \sqrt{\int_{T_i} \left(\delta \theta_{d^{n+1}}(C_i, t) \right)^2 dt} \quad i = 1, \dots, N^* \text{ avec } T_i = \left[\frac{t_f}{N^*}(i-1); \frac{t_f}{N^*}i \right].$$

Le capteur le plus pertinents sur T_i est retenu et écarté pour le calcul des autres capteurs pertinents sur les autres intervalles de temps. Le détail de l'algorithme de choix de capteurs est présenté ci-dessous (Figure 3.6).

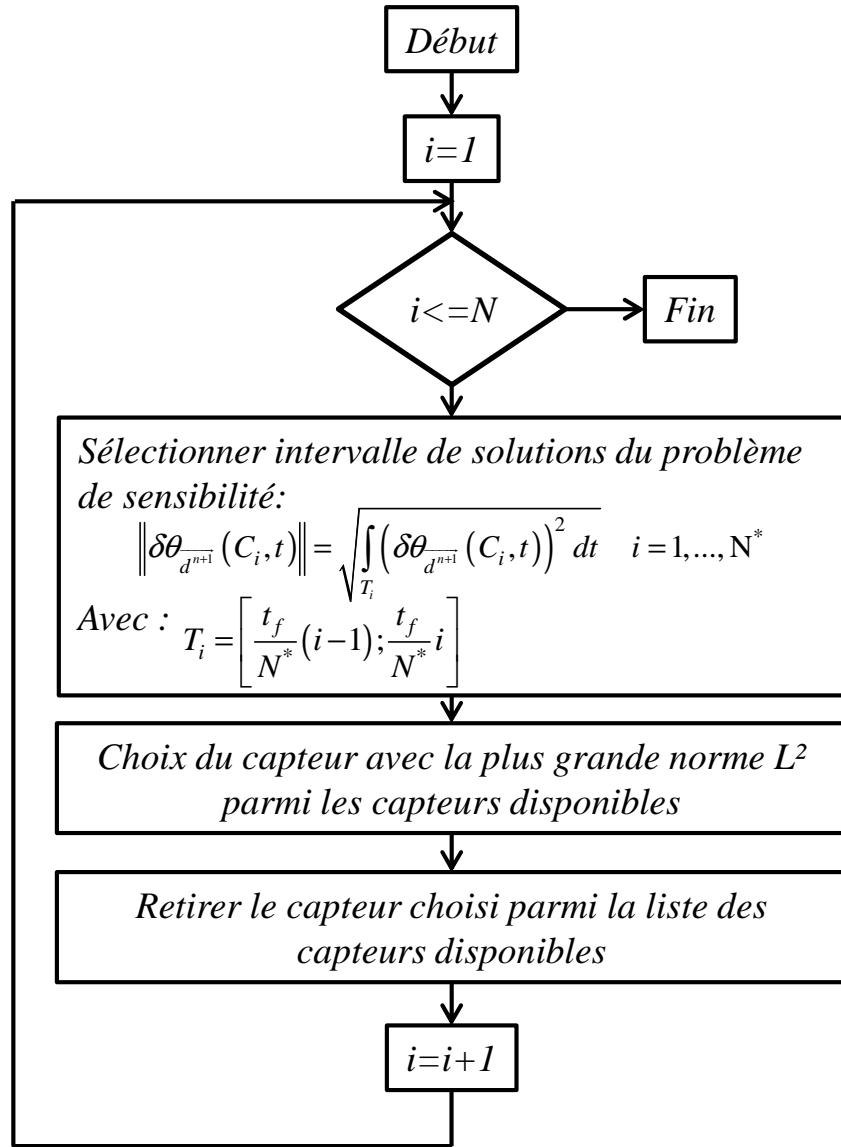


Figure 3.6. Détail de l'algorithme de choix de capteur.

Cette méthode permet de sélectionner pour la prochaine itération de l'algorithme de résolution les capteurs les plus sensibles par conséquent les plus pertinents afin d'accélérer le processus d'estimation de la densité de flux en écartant les capteurs les moins sensibles qui introduisaient du bruit de mesures pénalisant la convergence de l'algorithme.

Le principe et l'utilité du découpage sont illustrés ci-dessous :

Considérons trois évolutions de sensibilité récoltées à trois emplacements distincts de capteurs sur un intervalle de temps $I = [0, 60]$ s. $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ correspondant respectivement aux capteurs R_1, R_2 et R_3 . Les évolutions de sensibilité associées sont portées (Figure 3.7).

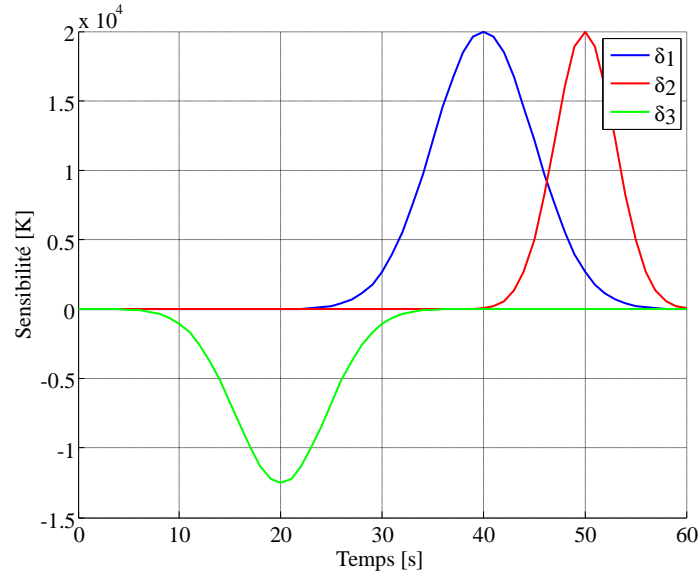


Figure 3.7. Représentation graphique de 3 sensibilités.

Souhaitant retenir deux capteurs les plus pertinents parmi les trois disponibles, les normes L^2 sont calculées pour chacune des évolutions de sensibilité et sont portés dans le Tableau 3.4.

Tableau 3.4: Résultats du calcul des normes L^2 sur l'intervalle de temps $[0, 60]$ s.

	Valeur de la norme L^2 associé sur l'intervalle de temps $[0:60]$
δ_1	25
δ_2	15
δ_3	13.5

Les normes L^2 les plus importantes sont celles associées à δ_1 et δ_2 . Les capteurs les plus sensibles sont donc les capteurs R_1 et R_2 . Cependant lors de l'étude du graphe Figure 3.7, les capteurs choisis ne sont pas sensibles sur l'intervalle $[0, 30]$ s soit sur la moitié du temps considéré. Afin de pallier ce problème, un découpage de l'intervalle de temps est réalisé afin de choisir des capteurs sensibles sur tout l'intervalle de temps I .

Désirant choisir deux capteurs les plus pertinents parmi les trois, l'intervalle de temps I est divisé en deux sous intervalles $I = \bigcup(I_1, I_2)$ avec $I_1 = [0, 30]$ s et $I_2 = [30, 60]$ s. Les normes L^2 sont calculées pour chacune des évolutions de sensibilité et pour chaque sous intervalles de temps et sont portées dans le Tableau 3.5 et le Tableau 3.6.

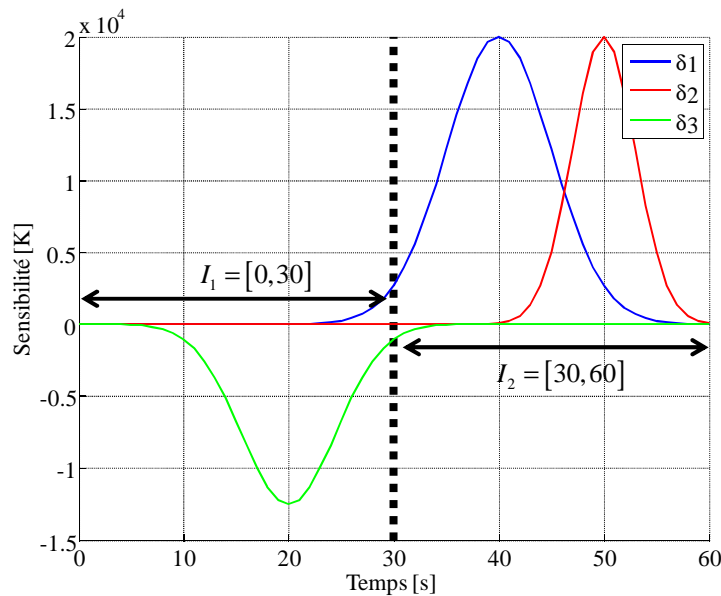


Figure 3.8. Représentation graphique du principe de découpage.

Tableau 3.5. Résultats du calcul des normes L^2 sur l'intervalle de temps $[0, 30]$ s.

	Valeur de la norme L^2 associée sur l'intervalle de temps $[0:30]$
δ_1	0.7 K
δ_2	0
δ_3	13.4 K

Tableau 3.6. Résultats du calcul des normes L^2 sur l'intervalle de temps $[30, 60]$ s.

	Valeur de la norme L^2 associée sur l'intervalle de temps $[30:60]$
δ_1	24.6 K
δ_2	15 K
δ_3	0.23 K (déjà retenu sur I_1)

En se référant à l'algorithme présenté Figure 3.6, le capteur n°3 est donc retenu sur I_1 et retiré de la liste des possibilités de choix de capteurs. Sur I_2 le capteur n°1 est retenu.

Sans découpage: les capteurs retenus sont le n°1 et le n°2.

Avec découpage: les capteurs retenus sont le n°1 et le n°3.

En analysant, le graphe Figure 3.8, le découpage en intervalles assure la présence d'un capteur sensible sur tout l'intervalle de temps considéré.

Cette méthode est mise en œuvre pour le problème inverse thermique présenté en 2.2. Dans le Tableau 3.7 les résultats de l'identification de la densité de flux en utilisant 12 capteurs évolutifs suivant les itérations de l'identification ainsi que la stratégie de choix de capteurs sont présentées, l'identification a convergé en 44 minutes. La densité de flux estimée est représentée en (Figure 3.9).

Tableau 3.7 : Résidus de températures avec 12 capteurs utilisés pour estimation.

moyenne des résidus (K)	écart type moyen des résidus (K)
-0.004	0.48

Les résultats présentés dans le Tableau 3.7 ainsi que le gain de temps de 8 minutes obtenus en utilisant 12 capteurs mettent en évidence l'influence du choix de capteurs pour réaliser une identification optimale. Une représentation graphique de la méthode de choix de capteurs est présentée en Figure 3.10. Pour chaque itération les 12 capteurs les plus pertinents sont représentés.

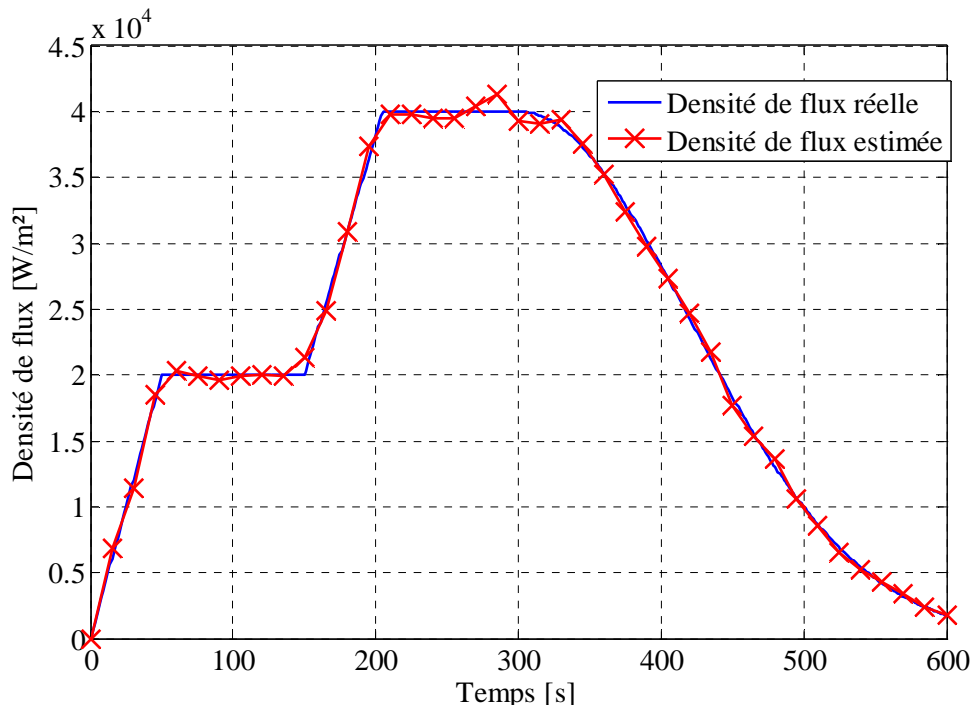
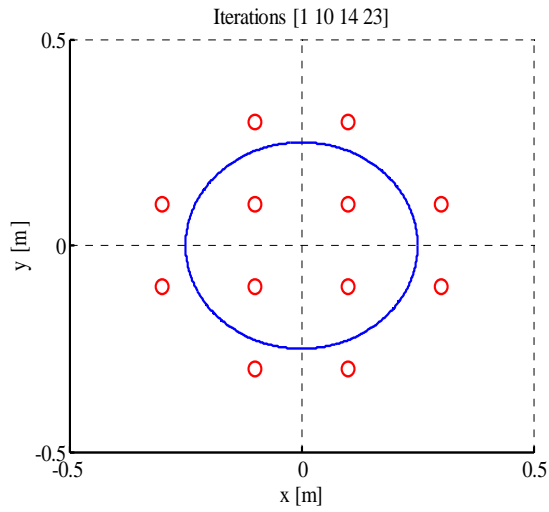
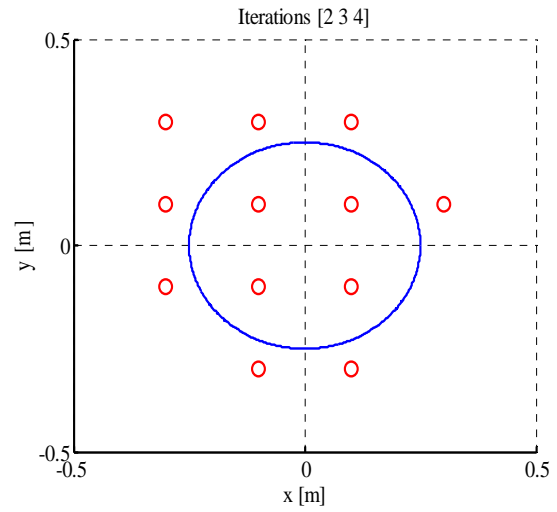


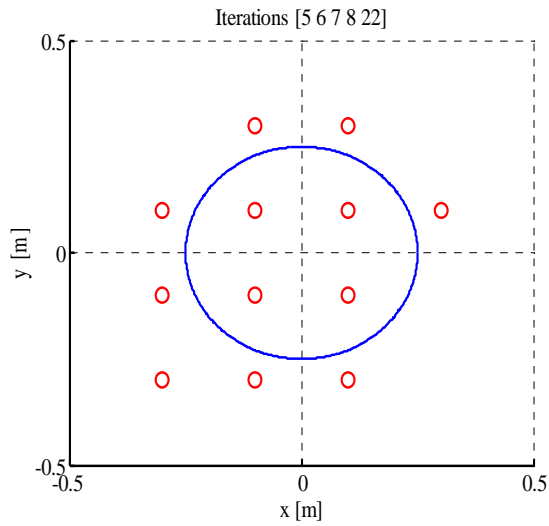
Figure 3.9. densité de flux identifiée avec 12 capteurs.



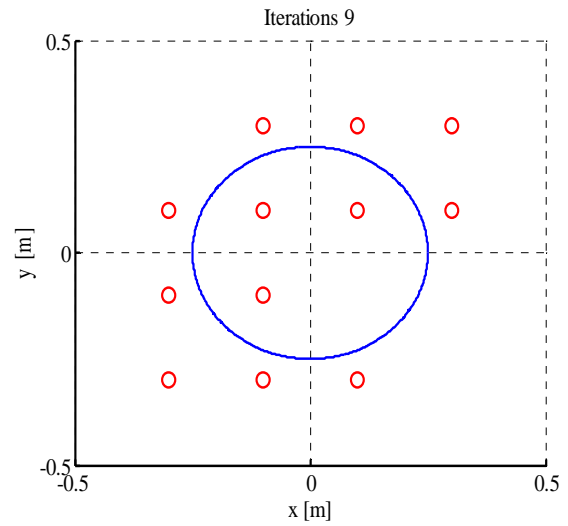
Itérations 1, 10, 14, 23



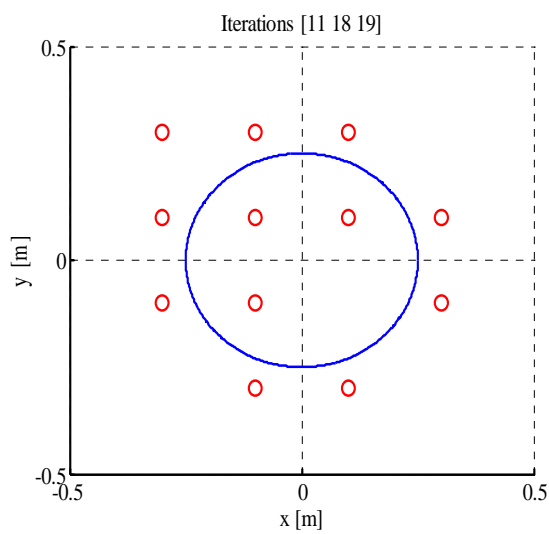
Itérations 2 à 4



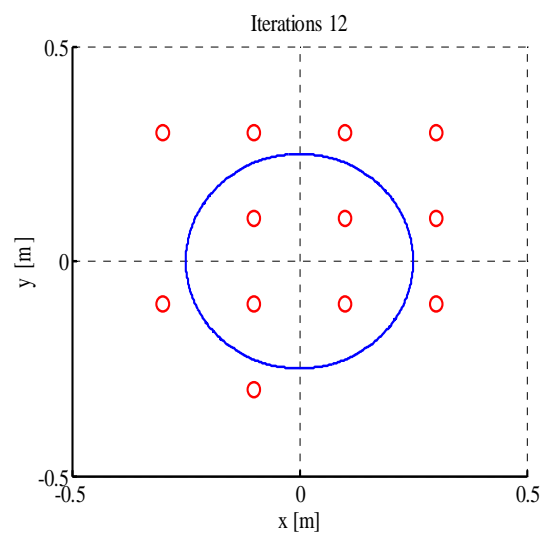
Itérations 5 à 8, 22



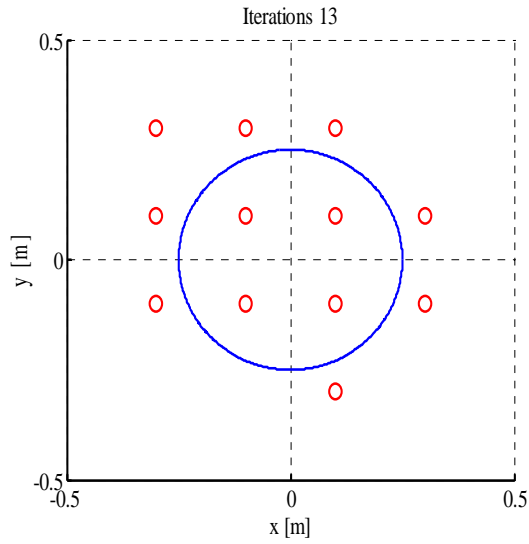
Itération 9



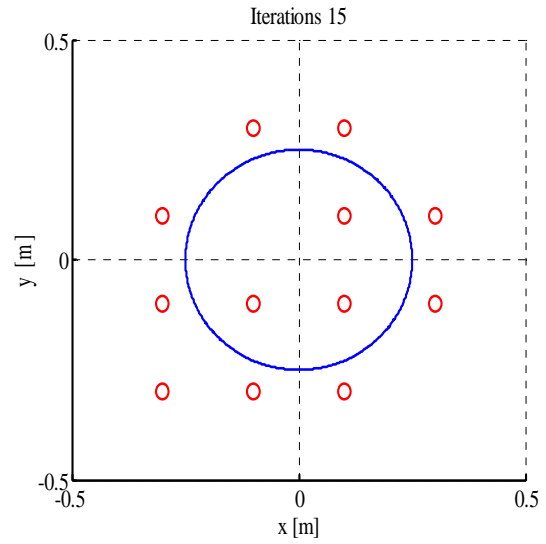
Itérations 11, 18, 19



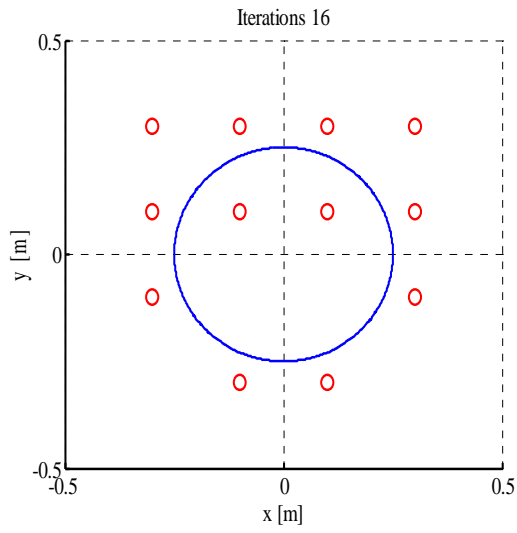
Itération 12



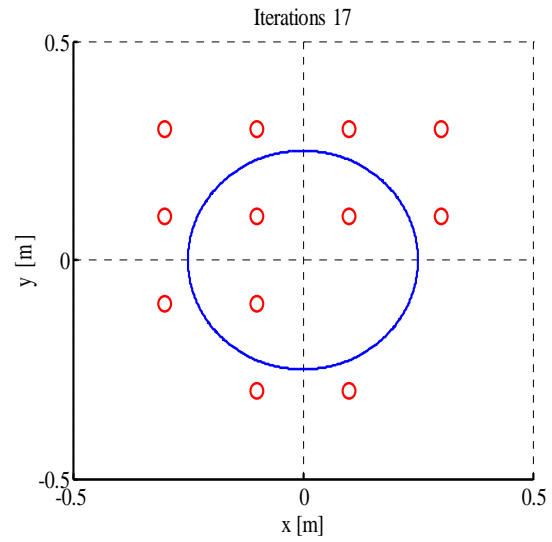
Itération 13



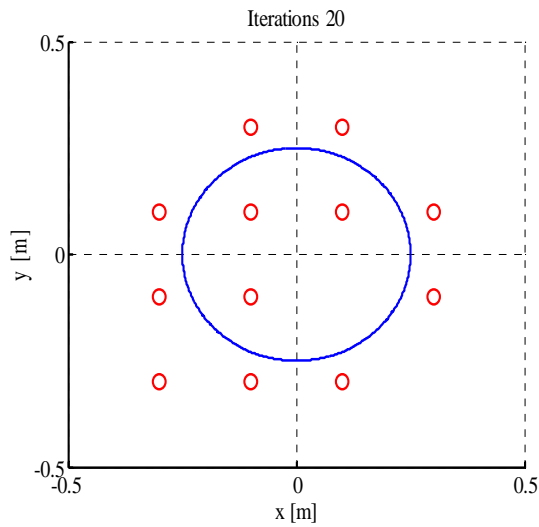
Itération 15



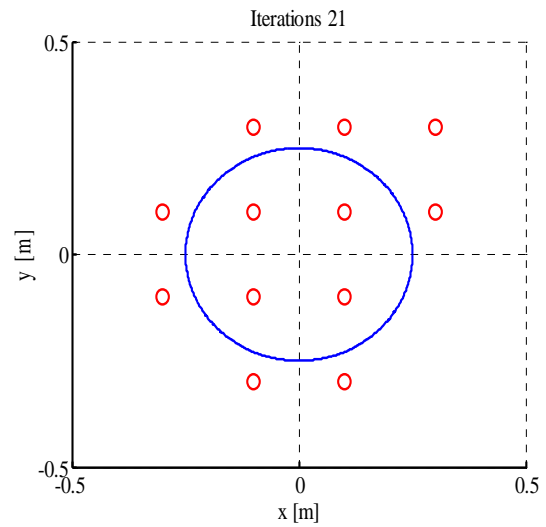
Itération 16



Itération 17



Itération 20



Itération 21

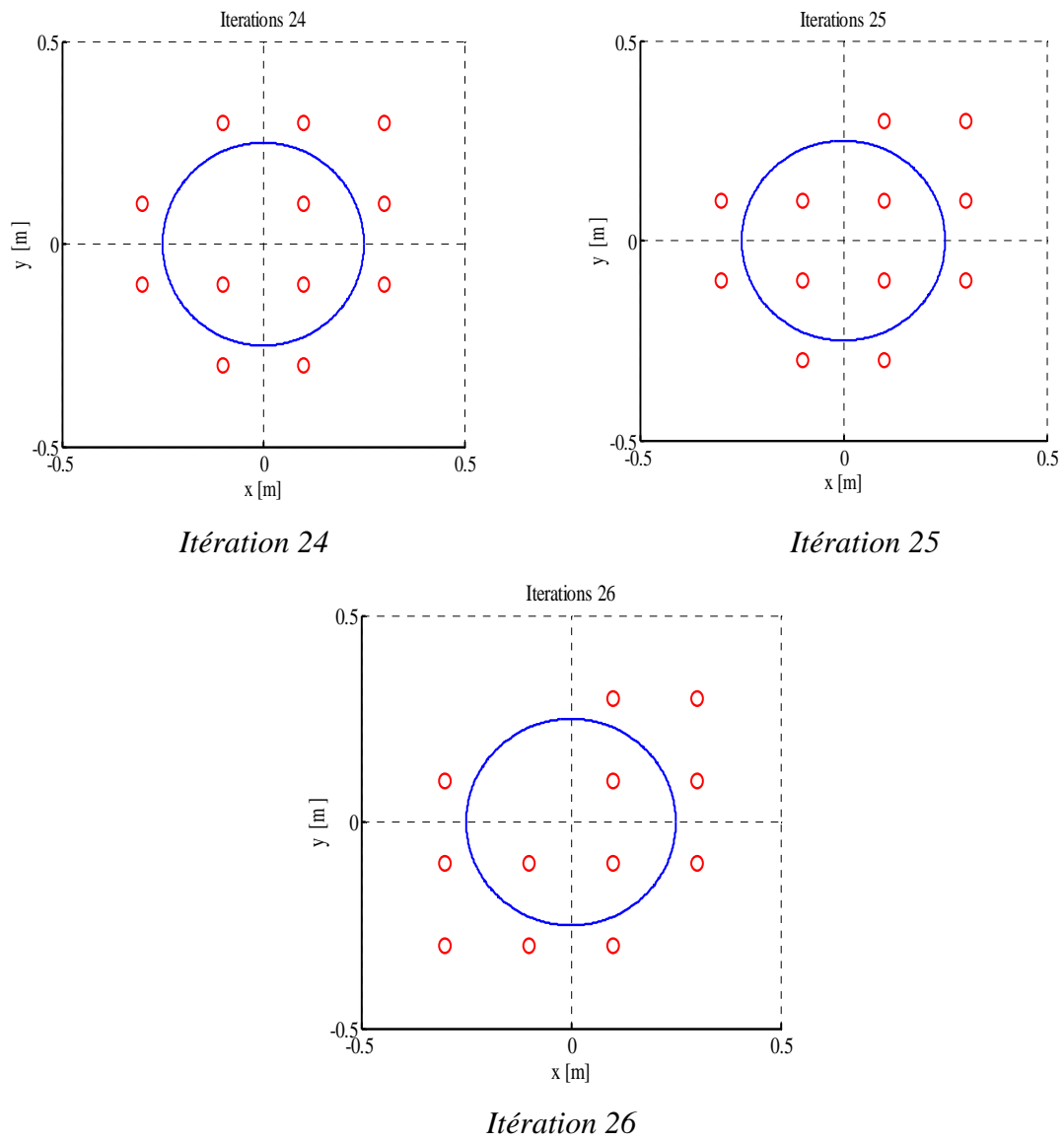


Figure 3.10. choix capteurs dans un réseau fixe.

2.3.3. Stratégie de choix de capteurs en ligne

Dans cette section la stratégie de choix de capteurs présentés en 2.3.2 est mise en œuvre sur la méthode d'identification en ligne proposée dans le chapitre 2. Les résultats présentés dans la section précédente montrent l'efficacité de la méthode du gradient conjugué (MGC) pour l'identification de flux thermique d'une source mobile. Cependant l'inconvénient suscité par cette méthode réside sur le temps de convergence de l'algorithme de résolution (44 minutes). Soit un temps total entre le début de la phase d'acquisition des mesures et la fin de l'algorithme d'estimation de la densité de flux de 54 minutes (10 minutes d'acquisition et 44 minutes d'estimation). Ici une présentation succincte de l'adaptation de la méthode du gradient conjugué afin d'estimer les valeurs de la densité de flux est exposée.

Rappel de la méthode de résolution en ligne

Pour une identification en ligne durant la phase d'acquisition des mesures réalisées sur le procédé, au fur et à mesure que de nouvelles mesures sont disponibles, la MGC présentée ci-dessus doit être adaptée. Considérant une succession d'intervalles de temps $\mathcal{T}_j \subset t_f$ tel que $\bigcup \mathcal{T}_j = t_f$. La MGC est ainsi implémentée sur un intervalle de temps $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+] \subset \mathcal{T}$ qui va glisser sur l'horizon temporel total avec un pas $\Delta t_i > 0$ afin d'identifier les valeurs des paramètres inconnus $\phi_1^{\mathcal{T}_i}(t)$. Lorsque les valeurs des paramètres recherchées sont jugées satisfaisantes sur l'intervalle \mathcal{T}_i , la fenêtre d'identification $\mathcal{T}_{i+1} = [\tau_i^- + \Delta t_i^-, \tau_i^+ + \Delta t_i^+] = [\tau_{i+1}^-, \tau_{i+1}^+]$ se déplace sur l'horizon de temps tout en considérant une initialisation $\phi_1^{\mathcal{T}_{i+1}}(t) = \phi_1^{\mathcal{T}_i}(t = \tau_i^+)$ et la température initiale du problème direct correspondante à $\theta(x, y, \tau_{i+1}^-)$. Plusieurs stratégies basées sur cette approche sont proposées par (Vergnaud, et al., 2014), dans cette communication la stratégie d'identification quasi en ligne avec un décalage à pas adaptatif a été retenue et implémentée avec une fenêtre d'identification de 60 secondes en utilisant 6 capteurs les plus efficaces suivant la norme L^2 (fournis par les problèmes de sensibilité résolus pour les différentes fenêtres d'identification).

Pour cette configuration, le choix évolutif de six capteurs a été étudié. Pour les perspectives de travaux de recherche à venir, une configuration visant à choisir un nombre non prédéterminé de capteurs basé sur la résolution du problème de sensibilité sera investiguée.

Dans la situation étudiée et présentée en 2.3.1, il est montré que l'identification hors ligne conduit à des résultats 44 minutes après la fin de l'expérimentation de 10 minutes, la méthode quasi en ligne avec choix de capteurs pertinents fournit des résultats satisfaisants seulement 15 secondes après la fin de l'expérimentation.

Cette approche permet aussi de disposer d'une estimation du paramètre inconnu avant même la fin du procédé (l'écart moyen entre les mesures et les résultats de l'identification quasi en ligne étant d'environ 7 secondes (voir Figure 3.11)). Les résidus de températures calculés avec la méthode en ligne avec choix de capteurs pertinents sont portés en Tableau 3.8. L'estimation de la densité de flux de la source mobile est représentée Figure 3.12.

Tableau 3.8. Résidus de températures avec la méthode quasi en ligne.

	moyenne des résidus (K)	écart type moyen des résidus (K)
Pour les capteurs $C_{j=(1,...,16)}$	-0.029	0.51

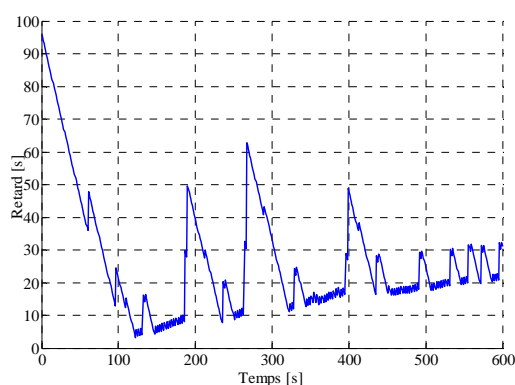


Figure 3.11. retard entre les résultats de l'identification et les mesures pour un décalage adaptatif.

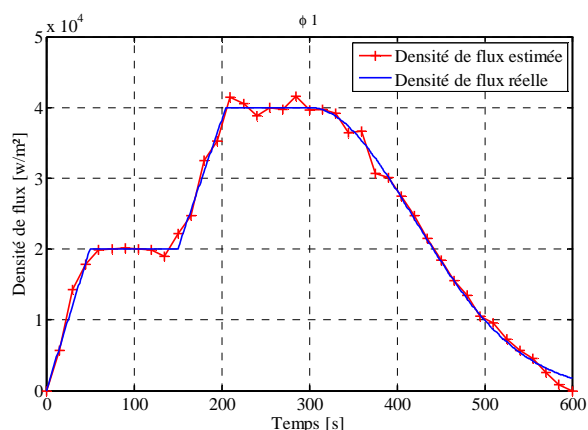
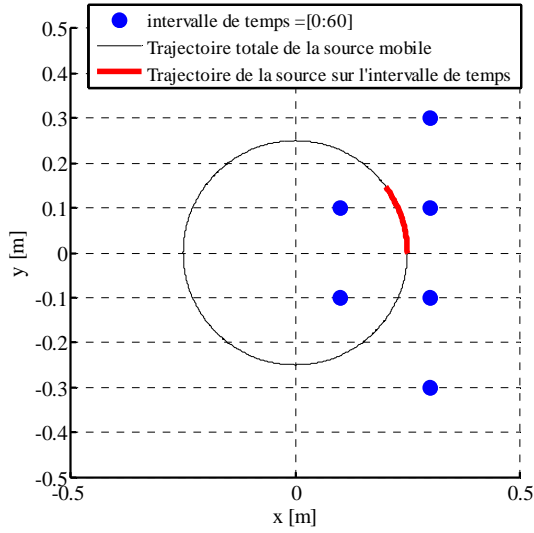
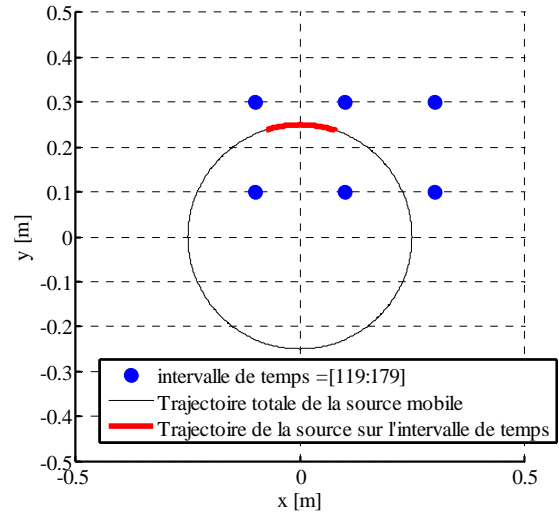


Figure 3.12. l'estimation de la densité de flux avec méthode quasi en ligne.

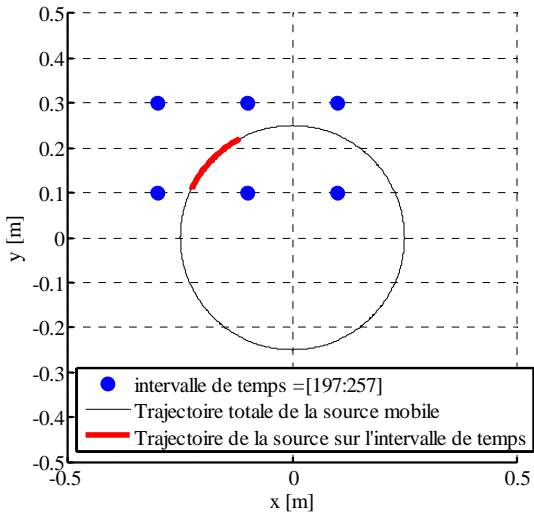
Compte tenu des résultats sur les résidus de température indiqués en Tableau 3.8 ainsi que l'estimation de la densité de flux, cette méthode s'avère une alternative pour la réduction et l'estimation de paramètre en ligne. En Figure 3.13, les choix de capteurs pertinents aux dernières itérations de l'algorithme de résolution sont présentés pour différents intervalles de temps.



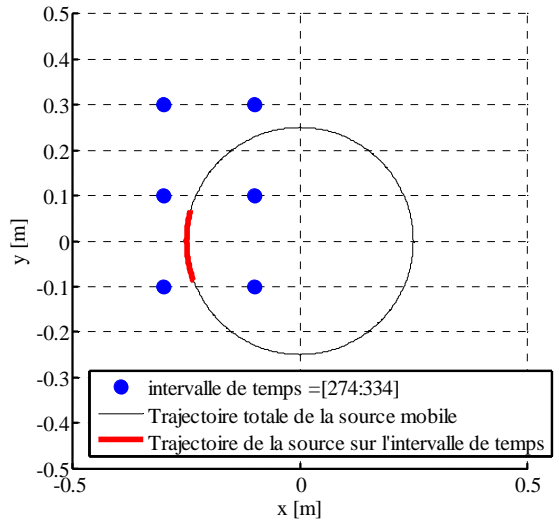
Intervalle de temps [0 ;60]s



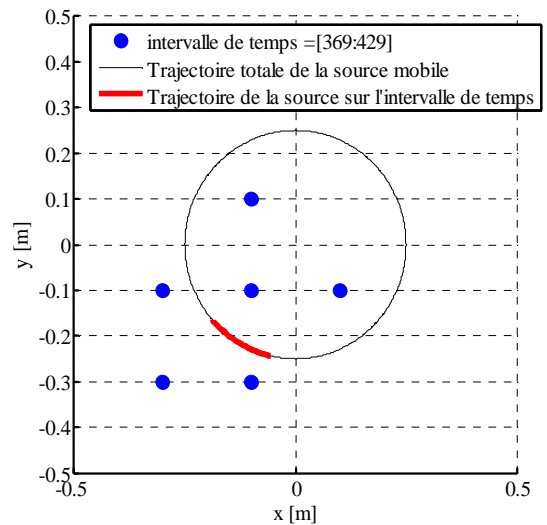
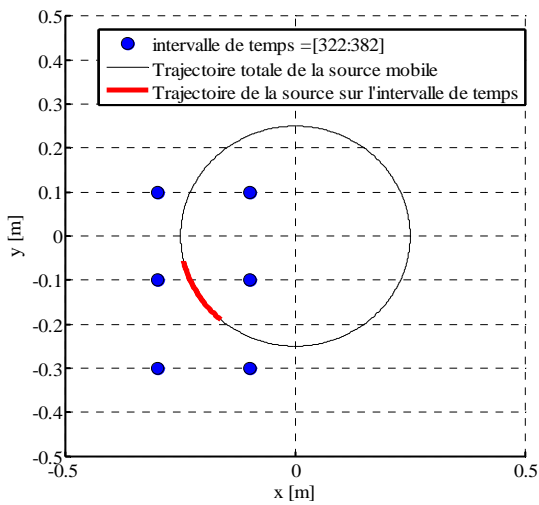
Intervalle de temps [119 ;179]s



Intervalle de temps [197 ;257]s



Intervalle de temps [274 ;334]s



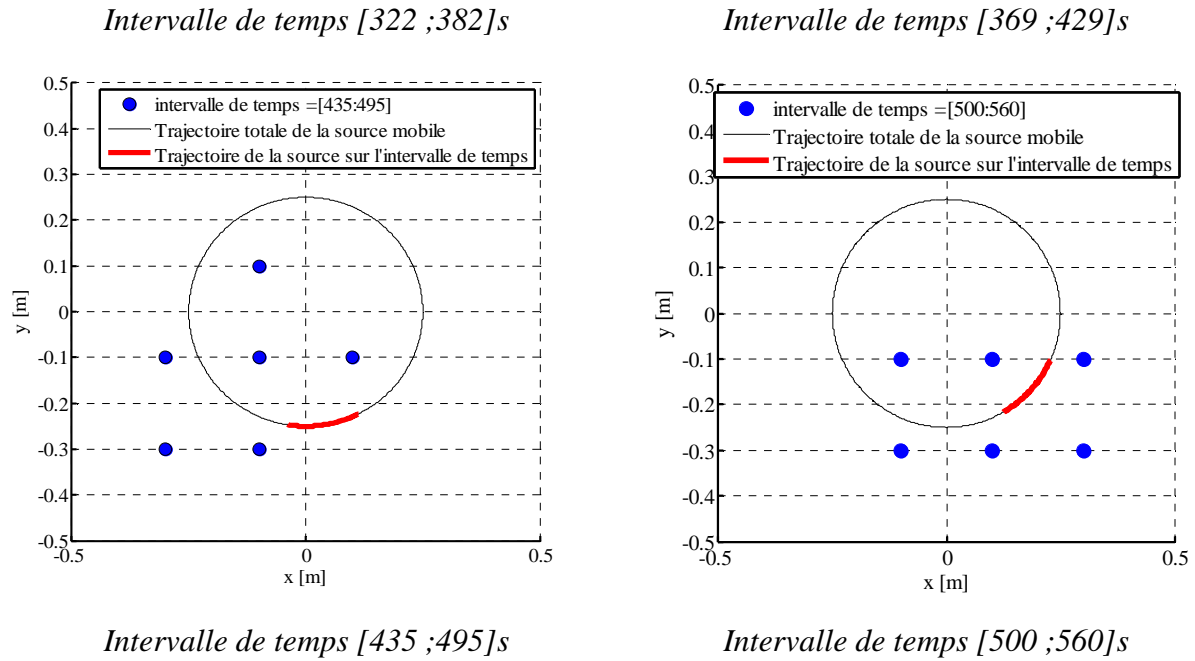


Figure 3.13. Représentation des choix de capteurs pour différents intervalles d'identification.

2.4.Bilan

Dans cette section, une stratégie de sélection de capteurs pour une identification de flux thermique quasi en ligne est présentée. Cette stratégie basée sur l'utilisation de la méthode du gradient conjuguée en ligne et l'utilisation du problème de sensibilité pour définir les capteurs pertinents parmi un réseau fixe montre son efficacité compte tenu du temps de convergence de l'algorithme et des résultats. Les perspectives de cette étude visent à utiliser une adaptation de cette méthode afin de définir des points de mesures pertinents et ainsi pourvoir définir un déploiement adaptatif de capteurs mobiles.

3. Déploiement adaptatif de capteurs mobiles

L'étude présentée dans cette section concerne l'identification en ligne de la trajectoire d'une source mobile chauffante à l'aide de capteurs mobiles. Une présentation du système étudié sera introduite dans un premier temps, puis dans un second temps une méthode permettant de calculer les positions optimales pour les mesures sera proposée afin d'identifier quasi en ligne la trajectoire avec un déploiement adaptatif de capteurs mobiles. Cette section vise à proposer une nouvelle méthode de déploiement de capteurs afin de réaliser des identifications de paramètres en ligne permettant ainsi un déploiement adaptatif au cours de l'expérimentation.

3.1. Présentation du système étudié

Considérons une source mobile chauffante S_1 évoluant sur une plaque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = (L \times l)$, de frontière $\partial\Omega \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur e suffisamment petite pour négliger les transferts en son sein. Considérons une source mobile S_1 évoluant sur cette plaque pendant un temps de t_f secondes (Figure 3.14).

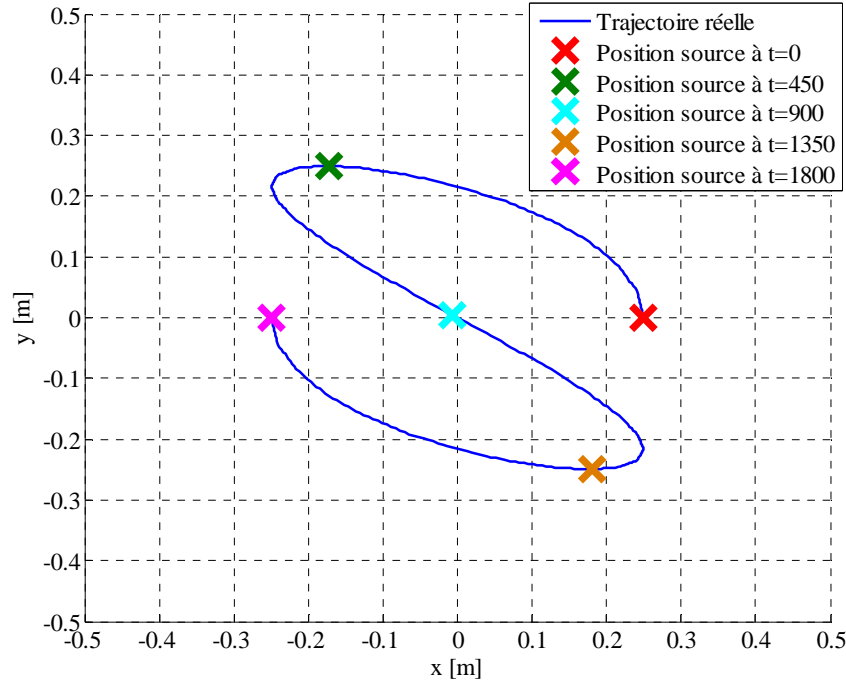


Figure 3.14. Système étudié.

Considérons que la densité de flux de chaleur $\phi(t)$ pour cette source, est supposée uniforme sur un disque mobile $D(I(t), r_s)$ où $I(t) = (x(t), y(t))$ décrit la trajectoire du centre de la source mobile de rayon r .

Considérons le modèle suivant afin de décrire la densité de flux de chauffe :

$$\Phi(x, y; t) = \frac{\phi(t)}{\pi} \left(-\text{atan} \left(\mu \left(\sqrt{(x - x(t))^2 + (y - y(t))^2} - r \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.11)$$

Le paramètre $\mu \in \mathbb{R}^+$ est choisi afin de décrire la discontinuité au voisinage de la limite du disque.

Il est important de noter que la fonction paramétrée présentée en (3.11) conduit à une description des flux de chaleur de manière continue et dérivable. Les coordonnées de la

trajectoire du disque de chauffe de la source mobile $x(t) = \sum_{i=1}^{N_t} x_i s_i(t) = (\overline{x_i})^{tr} \overline{s(t)}$ et

$y(t) = \sum_{i=1}^{N_t} y_i s_i(t) = (\overline{y_i})^{tr} \overline{s(t)}$ sont discrétisées toutes les 20 s sur la base des fonctions chapeaux¹ $s_i(t)$.

Ainsi, la distribution spatio-temporelle de température au sein du domaine $\theta(x, y, t)$ est solution du système d'équations aux dérivées partielles (3.12) considérant les paramètres indiqués dans le Tableau 3.9.

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y; t) = \frac{\Phi(x, y; t) - 2h(\theta(x, y; t) - \theta_0)}{e} & \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \theta(x, y; 0) = \theta_0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 & \forall (x, y; t) \in \partial \Omega \times [0, t_f] \end{cases} \quad (3.12)$$

¹ : voir p 32 du chapitre 1 pour une présentation des fonctions chapeaux.

Tableau 3.9. Paramètres du modèle.

Symbole	Définition	Valeur
ρc	Chaleur volumique	$2.43.10^6 \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$
h	Coefficient de convection naturelle	$15 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
t_f	Temps final	1800 s
λ	Conductivité thermique	$160 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\phi(t)$	Flux de chaleur	2.10^4 Wm^{-2}
θ_0	Température initiale	291 K
L	Longueur	1 m
l	Largeur	1 m
e	Epaisseur de la plaque	2.10^{-3} m
r	Rayon de chauffe de la source mobile	4.10^{-2} m
\vec{n}	Vecteur unitaire (normale externe pointant vers l'extérieur à $\partial\Omega$)	

3.2. Problème inverse

Afin d'estimer les coordonnées successives de la trajectoire de la source chauffante mobile $\bar{I} = \{\bar{x}, \bar{y}\}$, un critère quadratique à minimiser peut être écrit de la manière suivante :

$$J(\theta; \bar{I}) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(C_i(x, y, t), t; \bar{I}) - \hat{\theta}(C_i(x, y, t), t; \bar{I}) \right)^2 dt \quad (3.13)$$

Les températures « mesurées » $\hat{\theta}(C_i(x, y, t); t)$ sont obtenues par la résolution du problème direct avec les données exactes. L'algorithme de la MGC est composé comme dans les précédentes études de la résolution de trois problèmes bien posés (direct, adjoint et sensibilité) présentés ci-dessous.

3.2.1. Le problème de sensibilité.

Soit la variation de température $\delta\theta(x, y; t)$ induite par la variation de la trajectoire du centre de la source chauffante $\delta\bar{I} = (\delta\bar{x}, \delta\bar{y})$. En se basant sur le principe de construction de ce problème présenté dans la section 2 du chapitre 1. Le système d'EDPs décrivant ces équations peut être écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial \delta\theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \delta\theta(x, y; t) = \frac{\delta\Phi(x, y; t) - 2h\delta\theta(x, y; t)}{e} \quad \forall (x, y; t) \in \Omega \times [0, t_f] \\ \delta\theta(x, y; 0) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \delta\theta(x, y; t)}{\partial n} = 0 \quad \forall (x, y; t) \in \partial\Omega \times [0, t_f] \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \delta\Phi(x, y; t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{I}} \delta\bar{I} = \left(\sum_{i=1}^{N_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=1}^{N_i} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \delta y_i \right) \\ &= - \frac{\frac{\phi_j(t)}{\pi} \mu \left(\left(\sum_{i=1}^{N_i} \delta x_i s_i(t) \right) (\xi(x, t) - x) + \left(\sum_{i=1}^{N_i} \delta y_i s_i(t) \right) (\xi(y, t) - y) \right)}{\sqrt{(x - \xi(x, t))^2 + (y - \xi(y, t))^2} \cdot \left(1 + \left(\mu \left(\sqrt{(x - \xi(x, t))^2 + (y - \xi(y, t))^2} - r \right) \right)^2 \right)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Où : $\xi(x, t) = \sum_{i=1}^{N_i} x_i s_i(t)$ et $\xi(y, t) = \sum_{i=1}^{N_i} y_i s_i(t)$

L'expression de la profondeur de descente utilisée peut s'exprimer comme l'expression (1.17) présentée dans le chapitre 1. La formulation du problème adjoint présenté ci-dessous permet de calculer le gradient de la fonctionnelle à minimiser et ainsi pouvoir calculer les prochaines directions de descente des vecteurs de paramètres inconnus.

3.2.2. Le problème adjoint.

Ce problème consiste en l'introduction d'une formulation lagrangienne $\ell(\theta, \bar{I}, \psi)$ du problème de minimisation de la fonction quadratique et une fonction d'adjoint $\psi(x, y; t)$ afin de

déterminer le gradient $\overrightarrow{\nabla J^n} = \left(\frac{\partial J}{\partial x_i}, \frac{\partial J}{\partial y_i} \right)_{i=(1, \dots, N_t)}$ (\bar{x}^n, \bar{y}^n) de la fonctionnelle à minimiser.

$$\begin{aligned} \ell(\theta, \bar{I}, \psi) &= J(\theta, \bar{I}) + \\ &\quad \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \Delta \theta - \left(\frac{\Phi - 2h(\theta - \theta_0)}{e} \right) \right) \psi d\Omega dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(x, y, t; \bar{I}) - \hat{\theta}_i(t) \right)^2 \delta_{C_i}(x, y; t) d\Omega dt + \\ &\quad \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \Delta \theta - \left(\frac{\Phi - 2h(\theta - \theta_0)}{e} \right) \right) \psi d\Omega dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

Où $\delta_{C_i}(x, y; t)$ est la distribution de Dirac au capteur $C_i(x, y)$ à l'instant t .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta \ell(\theta, \bar{I}, \psi) &= \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \ell}{\partial \bar{I}} \delta \bar{I} + \frac{\partial \ell}{\partial \psi} \delta \psi \\ &= \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \delta \theta + \sum_{i=1}^{N_t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \ell}{\partial y_i} \delta y_i \right) \end{aligned}$$

Si $\theta(x, t)$ est solution du problème direct (3.12) alors $\ell(\theta, \bar{I}, \psi) = J(\theta, \bar{I})$ et

$$\delta \ell(\theta, \bar{I}, \psi) = \delta J(\theta, \bar{I}).$$

Si ψ est fixé alors $\frac{\partial \ell}{\partial \psi} \delta \psi = 0$

et que

$$\begin{aligned}
 \delta \ell(\theta, \bar{I}, \psi) &= \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \delta \theta + \sum_{i=1}^{N_t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \ell}{\partial y_i} \delta y_i \right) \\
 &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(x, y; t) - \hat{\theta}_j(t) \right) \delta_{C_i}(x, y; t) \right) \delta \theta(x, y; t) dx dy dt \\
 &\quad + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\rho c \frac{\partial \delta \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \delta \theta(x, y; t) + \frac{2h \delta \theta(x, y; t)}{e} \right) \psi(x, y; t) dx dy dt \\
 &\quad - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{I}} \delta \bar{I} \frac{\psi(x, y; t)}{e} dx dy dt
 \end{aligned}$$

Le multiplicateur de Lagrange ψ est fixé afin de satisfaire : $\frac{\partial \ell}{\partial \theta} \delta \theta = 0 \quad \forall \delta \theta$. Considérant les conditions aux limites du problème de sensibilité, est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial t} + \lambda \Delta \psi(x, y; t) = E(x, y; t) + \frac{2h}{e} \psi(x, y; t) & \forall (x, y; t) \in \Omega \times T \\ \psi(x, y; t_f) = 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ -\lambda \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 & \forall (x, y; t) \in \partial \Omega \times T \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\text{Avec } E(x, y, t) = \left(\sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(x, y; t) - \hat{\theta}_j(t) \right) \delta_{C_i}(x, y, t) \right).$$

$$\text{Ainsi, } \delta \ell(\theta, \bar{I}, \psi) = - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{I}} \delta \bar{I} \frac{\psi(x, y; t)}{e} dx dy dt$$

Cette intégrale peut être exprimée comme suit, compte tenu de (3.14) :

$$\delta \ell(\theta, \bar{I}, \psi) = \sum_{i=1}^{N_t} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \delta x_i \frac{\psi(x, y; t)}{e} dx dy dt + \sum_{i=1}^{N_t} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \delta y_i \frac{\psi(x, y; t)}{e} dx dy dt \quad (3.18)$$

$$\text{Comme } \delta \ell(\theta, \bar{I}, \psi) = \delta J(\theta, \bar{I})$$

Alors Le gradient de la fonctionnelle $\overline{\nabla J^n} = \left(\frac{\partial J}{\partial x_i}, \frac{\partial J}{\partial y_i} \right)_{i=(1, \dots, N_t)}$ peut s'exprimer de la manière

suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = \frac{\phi(t)}{\pi} \mu \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\left(\sum_{i=1}^{N_t} x_i s_i(t) \right) - x \right) s_i(t) A(x, y; t) \psi(x, y; t) dx dy dt$$

(3.19)

$$\frac{\partial J}{\partial y_i} = \frac{\phi(t)}{\pi} \mu \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\left(\sum_{i=1}^{N_t} y_i s_i(t) \right) - y \right) s_i(t) A(x, y; t) \psi(x, y; t) dx dy dt$$

Avec

$$A(x, y; t) = \frac{1}{\left(1 + \left(\mu \left(\sqrt{\left(x - \sum_{i=1}^{N_t} x_i s_i(t) \right)^2 + \left(y - \sum_{i=1}^{N_t} y_i s_i(t) \right)^2} - r \right) \right)^2 \right)}$$

A partir du calcul du gradient il est ainsi possible de définir les directions de descente utilisées dans l'algorithme du gradient conjugué.

3.3. Stratégies de déploiement de capteurs

Dans cette étude, l'identification de la trajectoire d'une source mobile chauffante est investiguée. Ayant à disposition N_c capteurs mobiles (exemple : Robots autonomes équipés de pyromètre laser), l'objectif est de reconstruire la trajectoire de cette source mobile avec des relevés de températures recueillies par les robots-capteurs se déplaçant au cours du temps et de l'expérimentation. Dans un tel contexte, le problème de déploiement des capteurs est essentiel.

La méthode de résolution du problème inverse est une méthode d'identification en ligne via une méthode de régularisation itérative du gradient conjugué. Comme vu précédemment, celle-ci est basée sur une estimation des paramètres inconnus sur un intervalle temporel glissant au cours du temps.

Algorithme :

Le calcul des nouvelles positions des capteurs est obtenu en utilisant les solutions calculées par le problème de sensibilité et obtenu sur l'intervalle de temps d'identification courant $\mathcal{T}_i = [\tau_i^-, \tau_i^+]$. Disposant de N_c capteurs mobiles, les N_c meilleures positions pour effectuer les mesures sont recherchées pour être par la suite envoyées aux capteurs mobiles afin d'avoir des capteurs les plus sensibles au cours de l'évolution du procédé.

Présentation de l'algorithme du gradient conjugué En Ligne avec déploiement de capteurs mobiles

Soit la fonctionnelle $J(\theta; \bar{I})$ à minimiser :

Avec

$$J(\theta; \bar{I}) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(C_i(x, y, t), t; \bar{I}) - \hat{\theta}(C_i(x, y, t), t; \bar{I}) \right)^2 dt.$$

Algorithme

Etape 1 : initialisation

- Initialisation $k=1$.
- Choisir un vecteur d'état initial $\bar{I}_{k=1}$

Etape 2 : mise en place de l'algorithme itératif

Tant que

- Choix de la taille de fenêtre d'identification \mathcal{T}_i Voir Chapitre 2 : La méthode du gradient conjugué en ligne prédictive avec taille de fenêtre automatique (MGC-EL-PA).
- Récupération des données capteurs sur \mathcal{T}_i aux positions courantes des robots $\hat{\theta}(C_i(x, y, t), t; \bar{I})$
- Résolution du problème direct sur \mathcal{T}_i
 - Récupération des mesures simulées associées aux positions des capteurs $\theta(C_i(x, y, t), t; \bar{I})$.
 - Calcul du critère
$$J(\theta; \bar{I}) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{N_c} \left(\theta(C_i(x, y, t), t; \bar{I}) - \hat{\theta}(C_i(x, y, t), t; \bar{I}) \right)^2 dt$$
 - Si $J(\lambda) < J_{stop}$ OU $k < \text{Max_iter}$ (nombre maximal d'itérations)
SORTIE DE BOUCLE
- Résolution du problème adjoint
 - Calcul du gradient de la fonctionnelle $\nabla J(\theta; \bar{I})_k$
 - Calcul de la nouvelle direction de descente

Si $k=1$

$$d_k = -\nabla J(\theta; \bar{I})_k$$

Sinon

$$d_k = -\nabla J(\theta; \bar{I})_k + \frac{\|\nabla J(\theta; \bar{I})_k\|}{\|\nabla J(\theta; \bar{I})_{k-1}\|} d_{k-1} \quad \text{où } \|\cdot\| \text{ est la norme}$$

Euclidienne

Fin si

➤ Résolution du problème de sensibilité

▪ Calcul de la profondeur de descente dans la direction de descente

$$\gamma^k = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathcal{T}} (\theta(x_i, t; \lambda^k) - \hat{\theta}_i(x_i, t)) \delta\theta(x_i, t; \lambda^k) dt}{\sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathcal{T}} (\delta\theta(x_i, t; \lambda^k))^2 dt}$$

➤ Calcul et envoi des nouvelles positions capteurs (Voir Stratégie de déploiement paragraphe 3.3.1 et 3.3.3 du chapitre 3)

➤ Calcul du nouvel itéré de \bar{I}_k : $\bar{I}_{k+1} = \bar{I}_k - \gamma^k d_k$

Itération de l'algorithme $k = k + 1$

Ci-dessous sont présentées, deux méthodes permettant de rechercher les nouvelles positions de mesures et ainsi pouvoir affecter à l'ensemble de la meute de capteurs mobiles des nouvelles coordonnées de mesures.

3.3.1. Méthode 1 : choix de zones pertinentes dans un quadrillage fixe

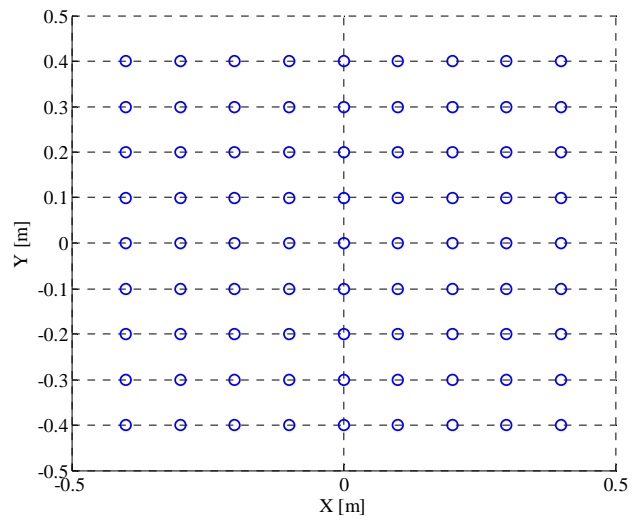
Cette première méthode se base sur l'algorithme de choix de capteurs dans un réseau fixe présenté dans le paragraphe 2 de ce chapitre. L'idée principale de cette méthode est de déplacer les robots observateurs vers des zones de mesures prédéterminées. Le détail de cette méthode est présenté ci-dessous.

Présentation de la méthode de choix de zones pertinentes dans un quadrillage fixe

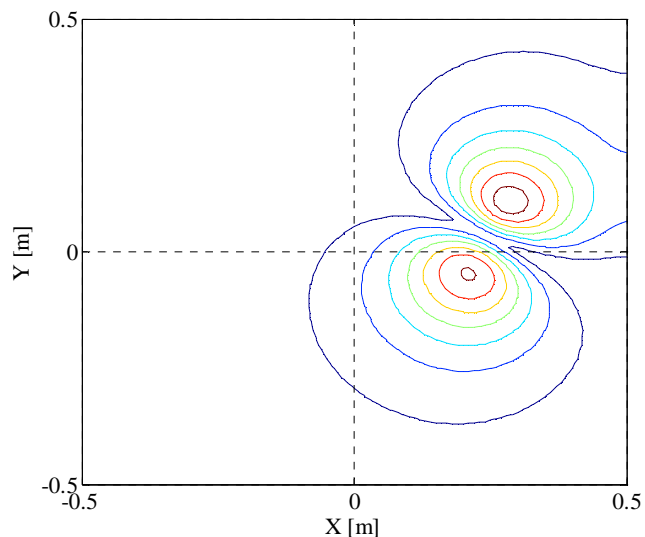
Etape 1 : Discrétisation de la solution du problème de sensibilité en un quadrillage de la plaque prédéfini :

Dans cet exemple : le pas de discrétisation choisi est de $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m.




Il s'agit des positions candidates potentielles.

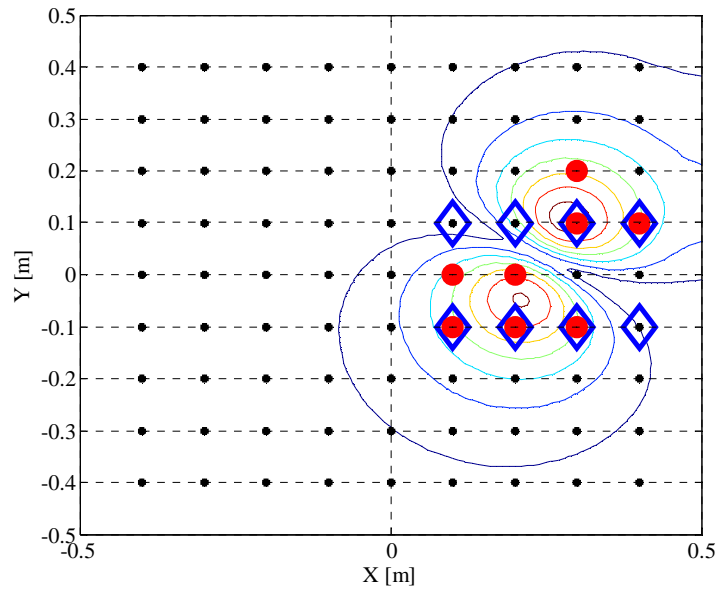


Etape 2 : Intégration suivant la norme L^2 des valeurs fournies par le problème de sensibilité.

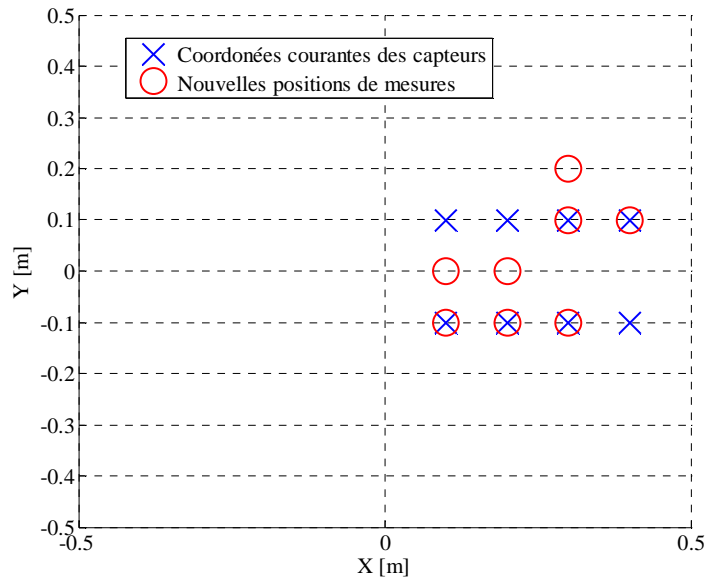


Etape 3 : L'algorithme de choix capteurs dans un réseau fixe (paragraphe 2.3.2) est appliqué en utilisant un ensemble de positions capteurs possibles comme discrétisé en étape 1.

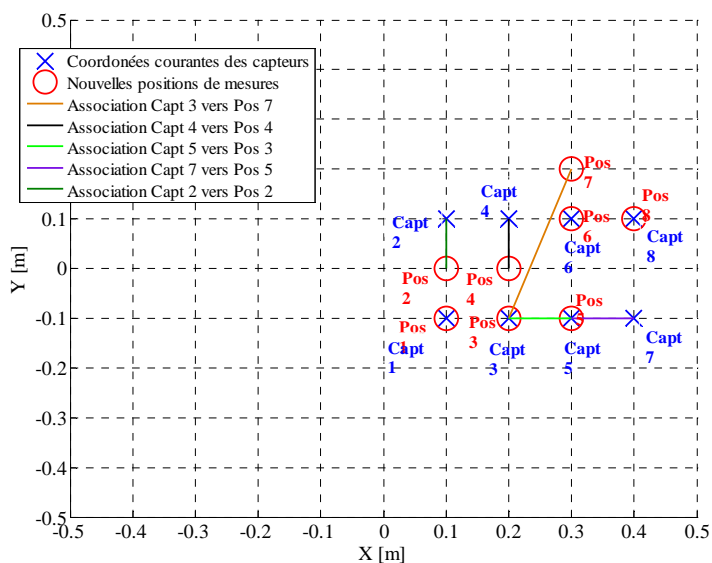
-  norme L^2 de $\delta\theta$
- Positions candidates pour nouvelles mesures
-  Positions actuelles des robots (ici 8 robots)
-  Positions retenues pour les nouvelles mesures



Etape 4 : Calcul de la somme des distances entre les positions courantes des capteurs et les nouvelles positions. Le capteur qui a la plus grande somme est affecté à la nouvelle position la plus proche de lui. L'opération est répétée jusqu'à ce que l'ensemble des capteurs ait une destination associée.



Etape 5 : L'ensemble des capteurs a une affectation avec une nouvelle position. Une commande est alors envoyée aux capteurs mobiles pour un déplacement vers les nouvelles positions. L'association entre les nouvelles positions et les positions courantes est déterminée de manière à ce que la distance parcourue par les robots soit la plus petite possible. Nous avons minimisé la distance totale des déplacements entre les robots et les points d'observation sans prendre en considération les éventuelles collisions avec l'environnement ou entre robots. Pour des stratégies d'affectation plus élaborées, le lecteur est invité à consulter la section 2.3 de (Lucidarme & Simonin, 2015) et (Bautin, 2012).



3.3.2. Résultats de la méthode 1.

L'algorithme d'identification présenté précédemment est mis en œuvre afin d'estimer la trajectoire de la source mobile avec un redéploiement de capteurs au cours du temps. Les résultats de l'identification avec la méthode d'identification quasi en ligne (Stratégie 6 du chapitre 2) sont présentés ci-dessous. L'estimation de la trajectoire de la source mobile est disponible au bout de 1873 secondes soit 73 secondes après la fin de l'expérimentation. Un ensemble de huit capteurs mobiles est initialement placés à $(t = 0)$ comme :

$$\begin{aligned} C_1(x, y) &= (0.1, -0.1), & C_2(x, y) &= (0.1, 0.1), & C_3(x, y) &= (0.2, -0.1), & C_4(x, y) &= (0.2, 0.1), \\ C_5(x, y) &= (0.3, -0.1), & C_6(x, y) &= (0.3, 0.1), & C_7(x, y) &= (0.4, -0.1), & C_8(x, y) &= (0.4, 0.1) \end{aligned}$$

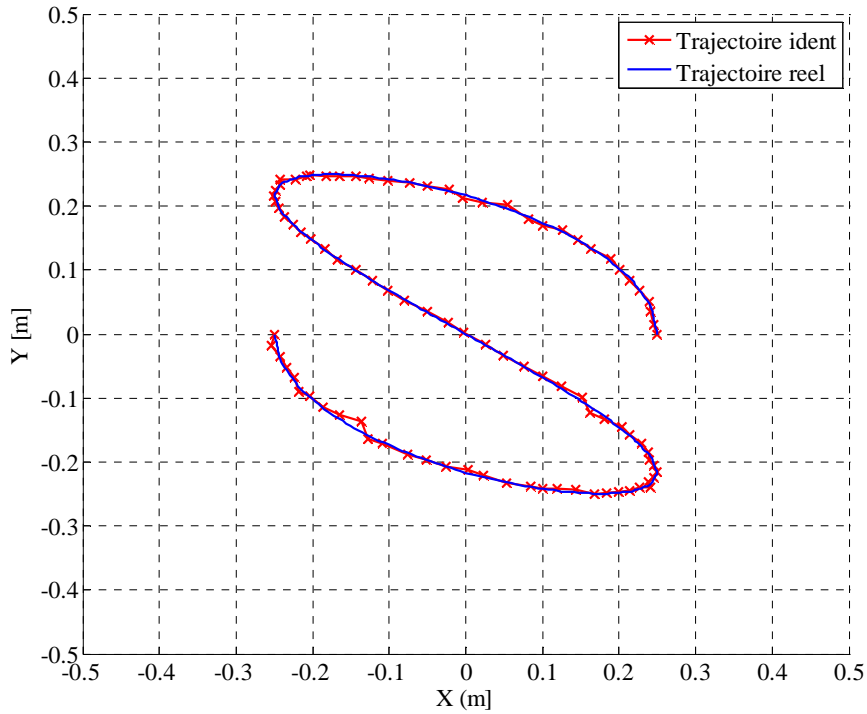


Figure 3.15. Trajectoire estimée à la fin de la procédure d'identification en ligne.

Sur la Figure 3.15, l'estimation de la trajectoire est représentée. Afin de calculer l'efficacité de la méthode d'identification, les résidus de température ont été calculés pour plusieurs emplacements capteurs. Les résultats sur les résidus ont pour moyenne -0,19 K et pour écart type 0,7 K. S'agissant de simulations numériques, les données réelles simulées comportent un bruit additif gaussien $\mathcal{N}(0,0.5)$.

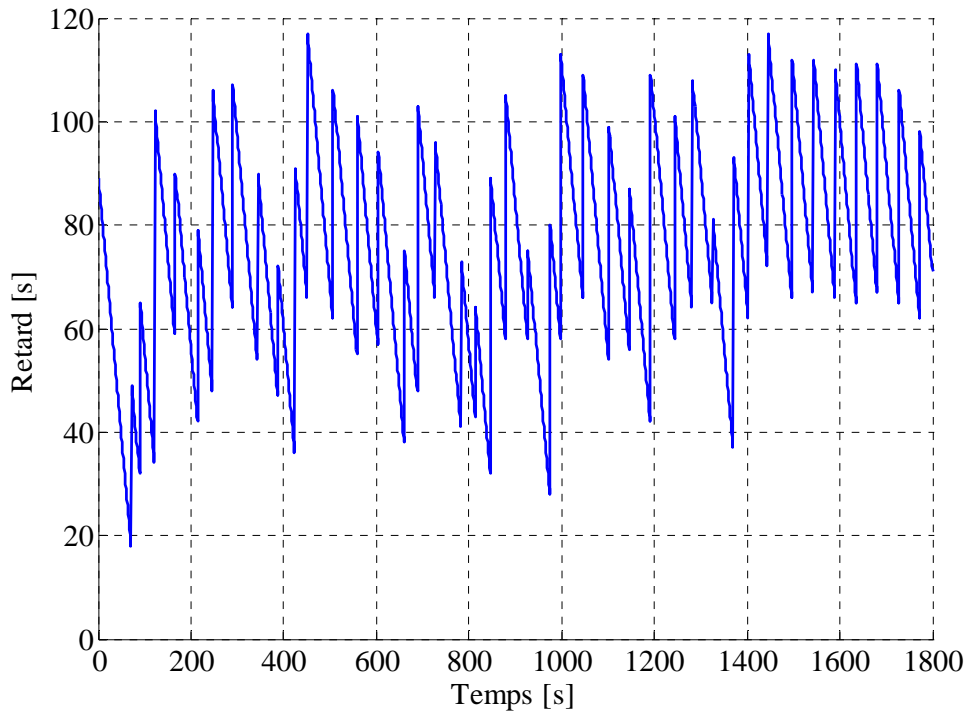


Figure 3.16. *Retard à l'identification.*

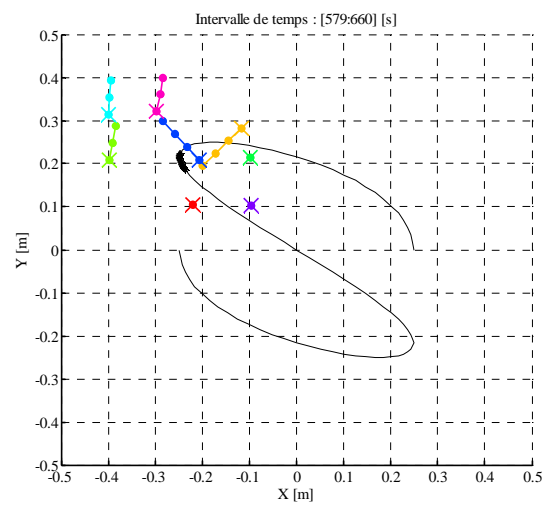
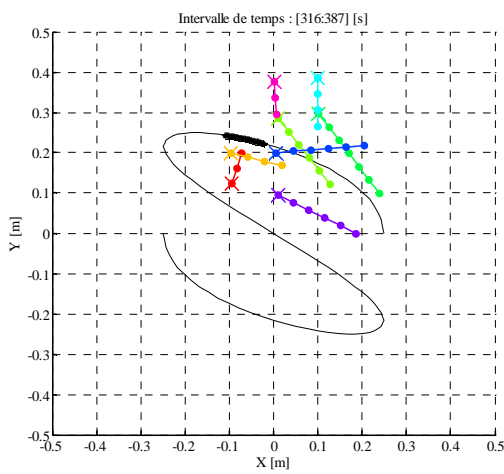
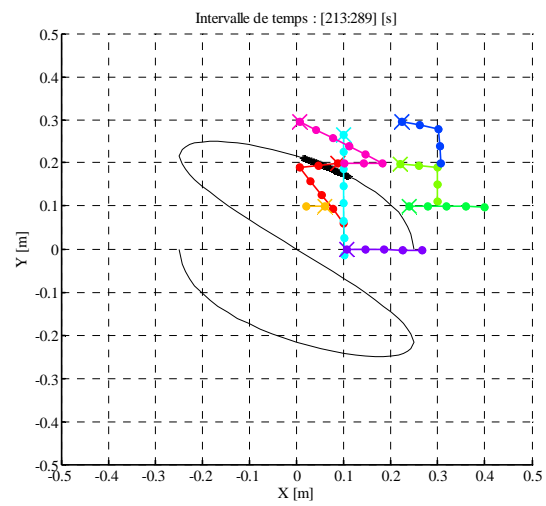
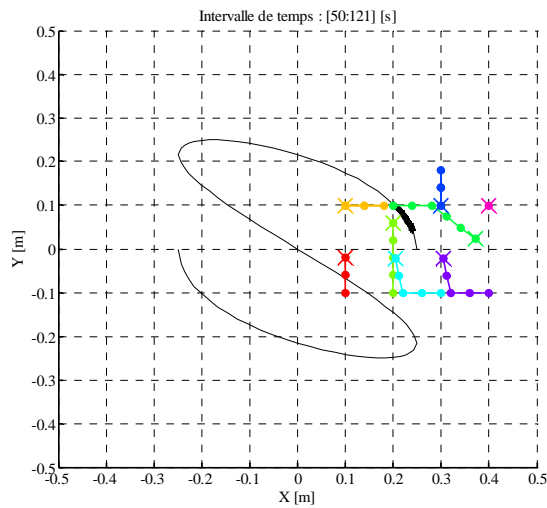
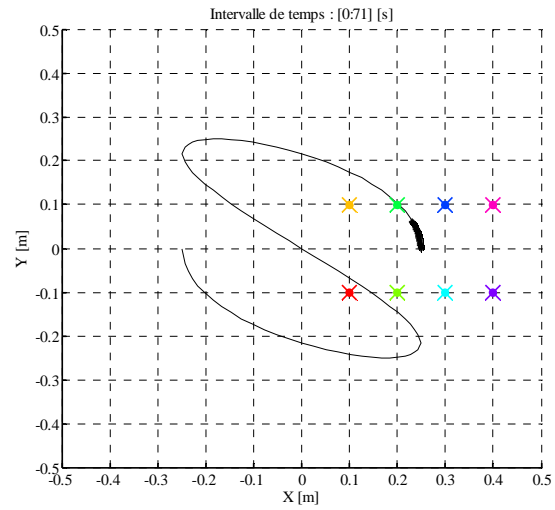
L'évolution du retard d'identification entre les données réelles disponibles et les données identifiées sont portées sur la Figure 3.16. Le retard moyen d'identification est de 75 secondes.

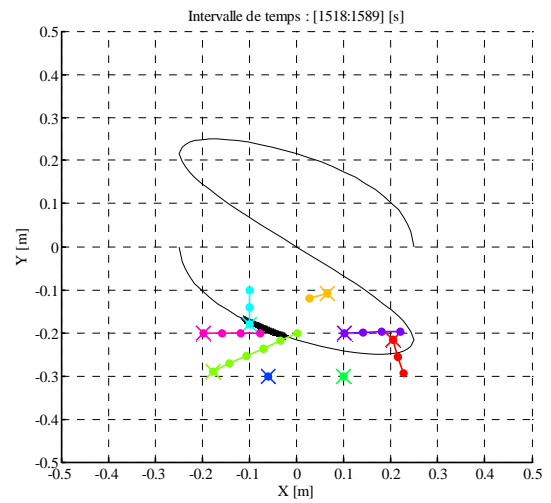
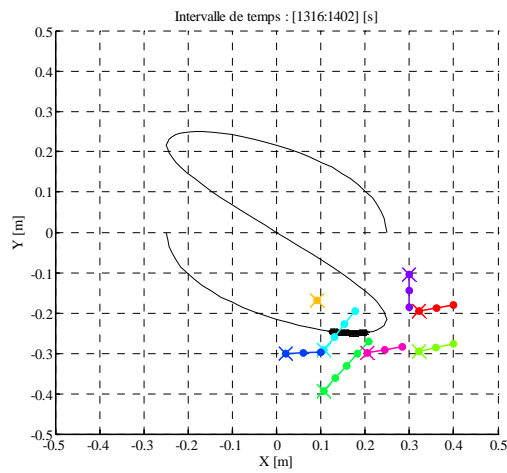
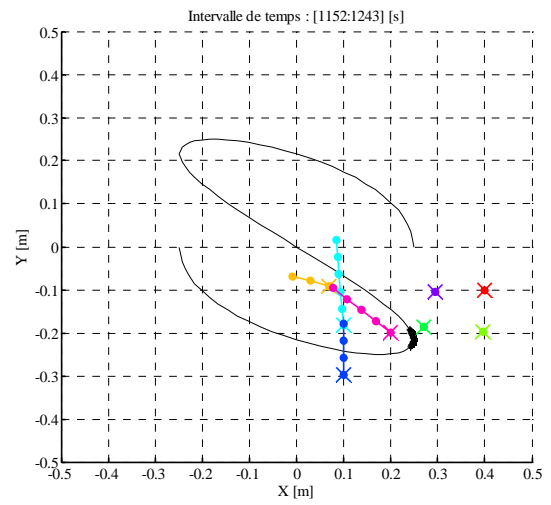
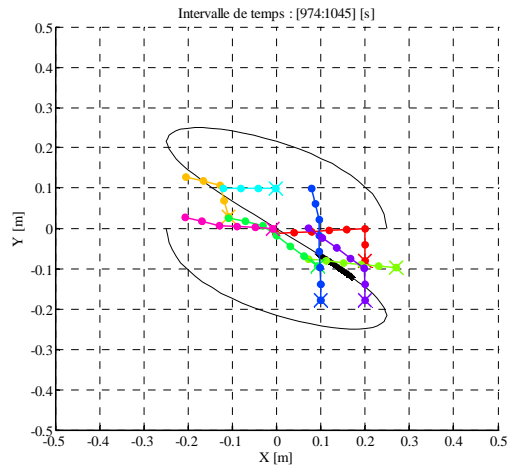
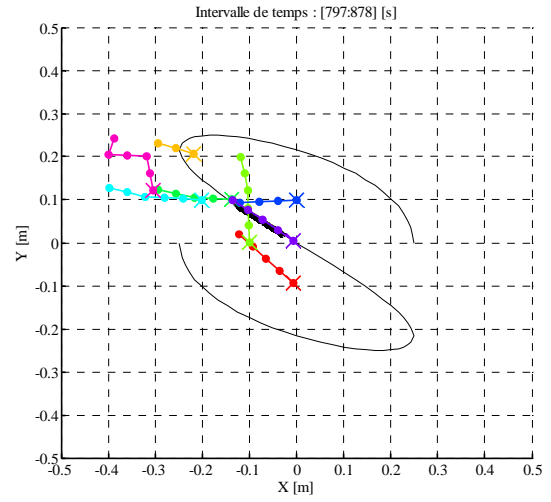
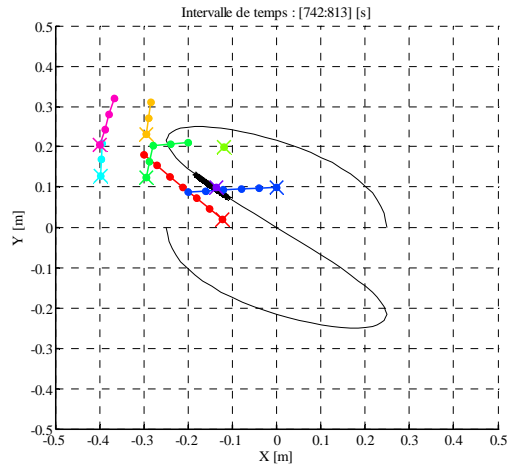
Les figures présentées ci-dessous illustrent l'évolution des positions des différents capteurs au cours du temps. Pour plusieurs intervalles d'identification, le positionnement des capteurs sur ces intervalles de temps est illustré ainsi que la trajectoire courante estimée.

Légende :

- Trajectoire Réelle
- * Trajectoire estimée
- ✕ Capt n°1
- ✕ Capt n°2
- ✕ Capt n°3
- ✕ Capt n°4
- ✕ Capt n°5
- ✕ Capt n°6
- ✕ Capt n°7
- ✕ Capt n°8

Note : les croix sur les trajectoires représentent les positions des robots aux derniers temps de l'intervalle de temps courant.





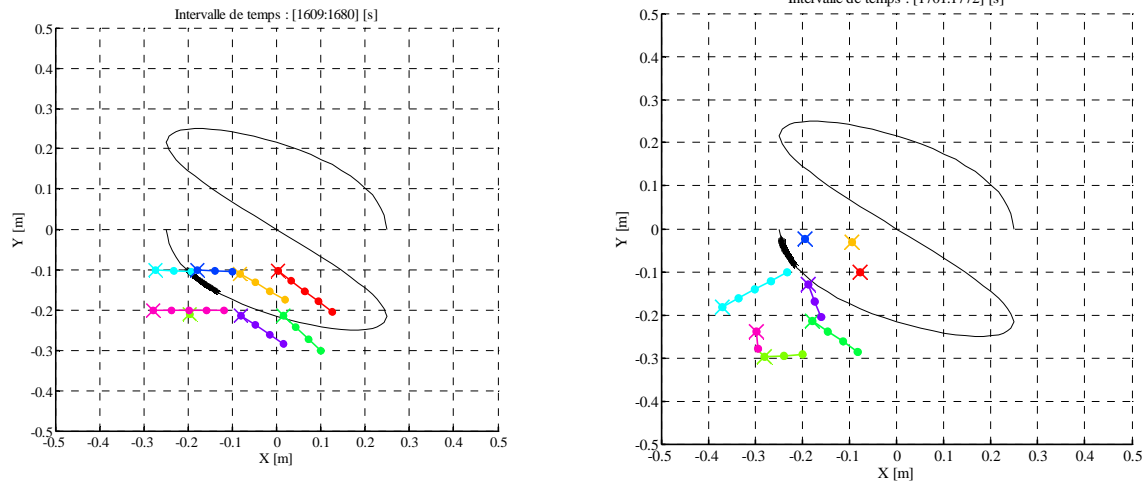


Figure 3.17. Représentation des trajectoires des capteurs sur différents intervalles d'identification.

La Figure 3.17 illustre le comportement des capteurs mobiles. En effet, sur les différentes images l'ensemble des capteurs suit bien l'évolution de la source chauffante mobile.

Les résultats présentés mettent en évidence l'efficacité de l'utilisation de robots mobiles embarquant des observateurs pour une identification de paramètres inconnus de systèmes régis par des EDPs.

3.3.3. Méthode 2 : choix de zones pertinentes sans quadrillage fixe

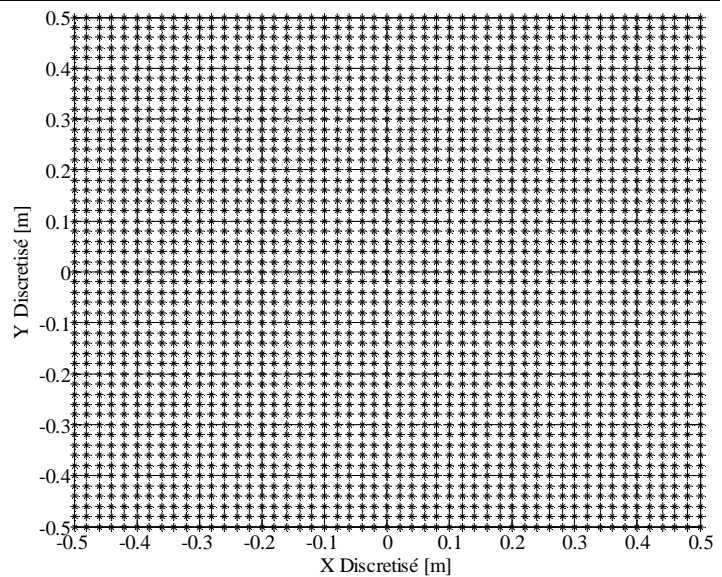
L'idée principale de cette seconde méthode est de déplacer les robots observateurs vers des zones de mesures non prédéterminées. En effet, il est possible de penser que les meilleures régions d'intérêts pour les mesures ne se situent pas obligatoirement sur un quadrillage prédéfini (même si celui-ci peut-être raffiné extrêmement petit). Une autre méthode dont le détail est présenté ci-dessous a été développée.

Présentation de la méthode de choix de zones pertinentes

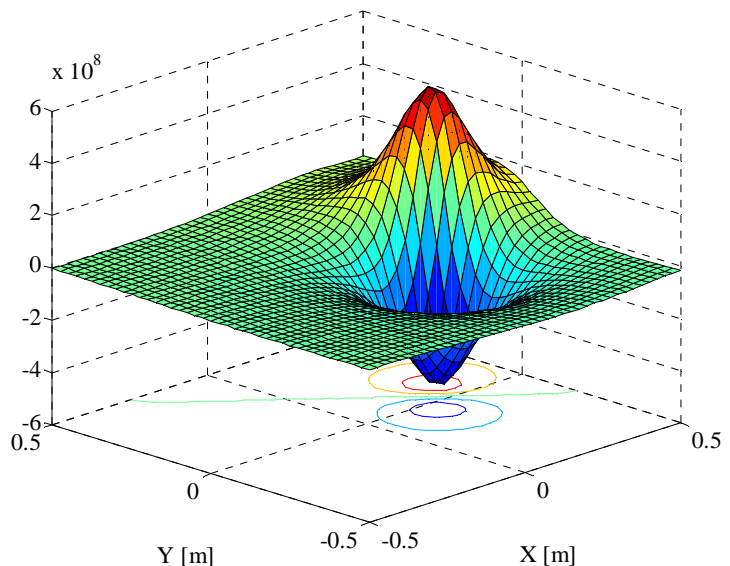
Etape 1 : Discrétisation de la solution du problème de sensibilité en un quadrillage de la plaque prédéfini :

Dans cet exemple : le pas de discrétisation choisit est de $\Delta x = \Delta y = 0.02$ m.

Il s'agit des positions candidates potentielles.

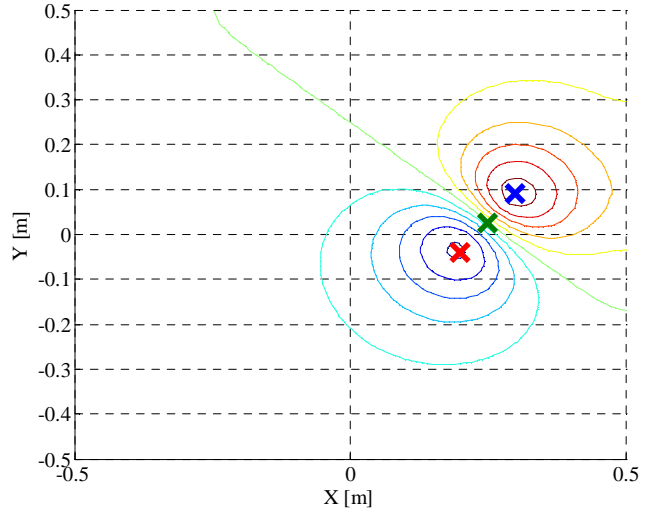


Etape 2 : Intégration sur \mathcal{T}_i des valeurs de sensibilité aux positions candidates présentées ci-dessus. Les valeurs sont stockées dans une matrice.



Etape 3 : On recherche les coordonnées du Maximum x_M, y_M et du Minimum x_m, y_m de la matrice ci-dessus. Et on calcule les coordonnées x_{med}, y_{med} du point médian.

Le choix de recherche du point médian est utilisé pour une estimation a priori de la position de la source mobile chauffante. En effet, il est possible de s'attendre à ce que la source mobile se trouve entre la zone minimale et maximale fournit par le problème de sensibilité.

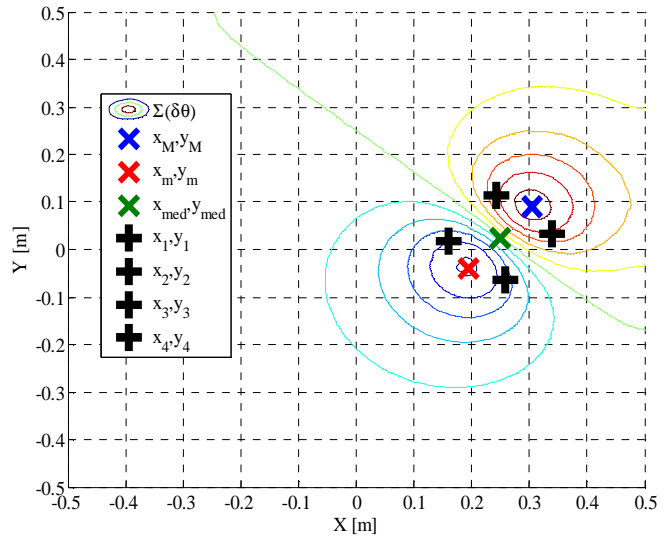


Etape 4 : à partir des coordonnées du point médian x_{med}, y_{med} on construit N_c points $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ et x_4, y_4 permettant de découper un cercle de centre x_{med}, y_{med} et de rayon

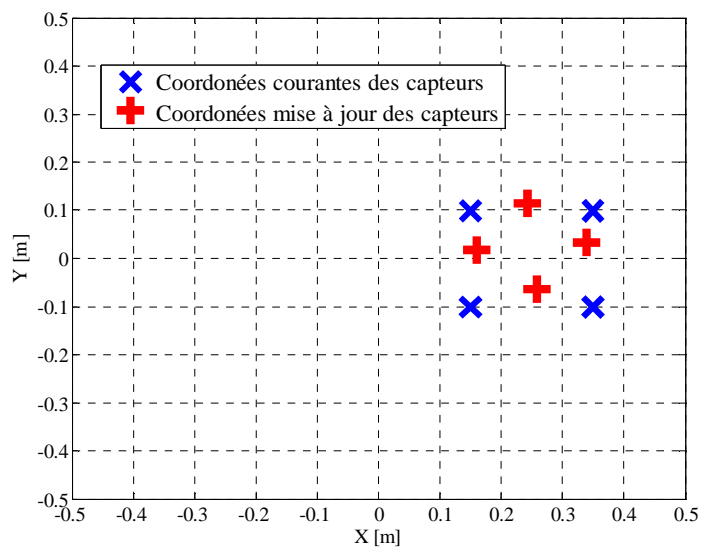
$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(x_M - x_m)^2 + (y_M - y_m)^2} \text{ en } N_c$$

portions afin de répartir de manière homogène les nouvelles positions d'observations pour couvrir une meilleure zone.

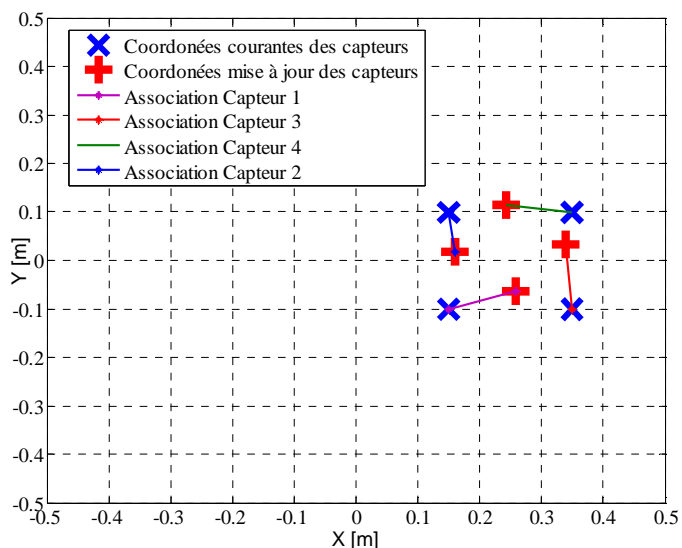
Dans l'exemple, ci-contre, on voit que les quatre points d'observations (en noir) sont répartis de manière à ce que les nouveaux points ne soient pas sur le point minimal et le point maximal car ceux-ci forment une trajectoire de la source et les nouveaux points d'observations ne doivent pas se situer sur cette droite (collision entre robot capteurs et sources mobiles).



Etape 5 : Calcul de la somme des distances entre les positions courantes des capteurs et les nouvelles positions. Le capteur qui a la plus grande somme est affecté à la nouvelle position la plus proche de lui. L'opération est répétée jusqu'à ce que l'ensemble des 4 capteurs aient une destination associée.



Etape 6 : L'ensemble des capteurs à une affectation avec une nouvelle position. Une commande est alors envoyée aux capteurs mobiles pour un déplacement vers les nouvelles positions. L'association entre les nouvelles positions et les positions courantes est déterminée de manière à ce que la distance parcourue par les robots soit la plus petite possible.



3.3.3. Résultats de la méthode 2.

L'algorithme d'identification présenté précédemment est mis en œuvre afin d'estimer la trajectoire de la source mobile avec un redéploiement de capteurs au cours du temps. Les résultats de l'identification avec la méthode d'identification quasi en ligne (Stratégie 6 du chapitre 2) sont présentés ci-dessous. L'estimation de la trajectoire de la source mobile est disponible au bout de 1886 secondes soit 86 secondes après la fin de l'expérimentation. Un ensemble de quatre capteurs mobiles est initialement placés à $(t=0)$ comme :

$$C_1(x, y) = (0.15, -0.1), \quad C_2(x, y) = (0.15, 0.1), \quad C_3(x, y) = (0.35, -0.1), \quad C_4(x, y) = (0.35, 0.1)$$

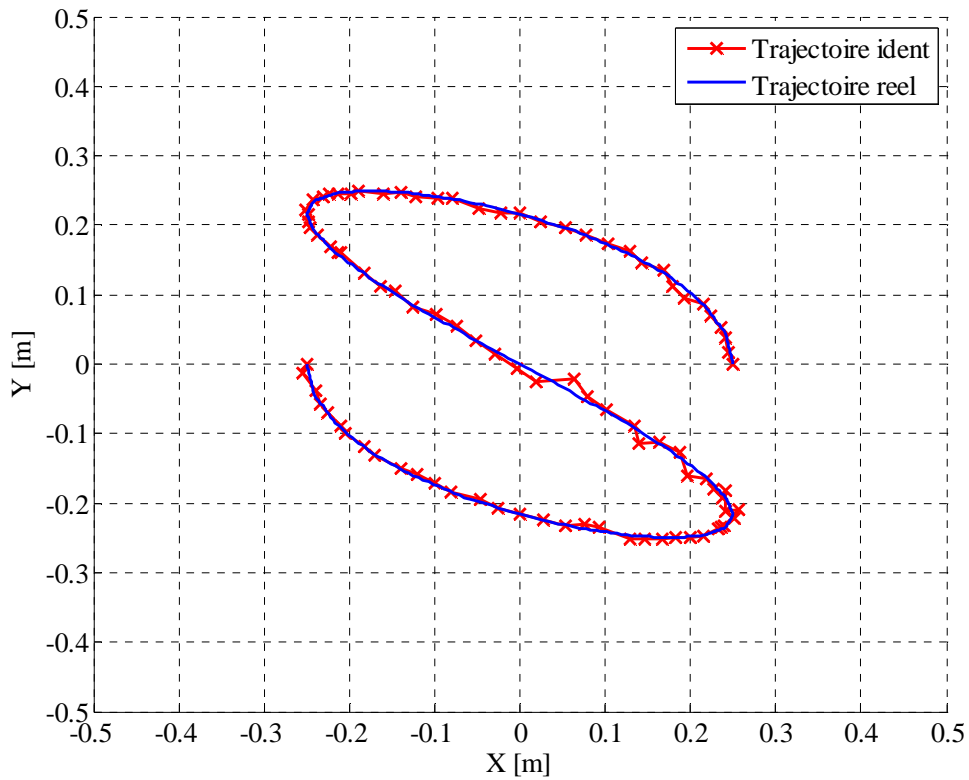


Figure 3.18. *Trajectoire estimée à la fin de la procédure d'identification en ligne.*

Sur la Figure 3.18, l'estimation de la trajectoire est représentée. Afin de calculer l'efficacité de la méthode d'identification, les résidus de température ont été calculés pour plusieurs emplacements capteurs. Les résultats sur les résidus ont pour moyenne -0,19 K et pour écart

type 0,64 K. S'agissant de simulations numériques, les données réelles simulées comportent un bruit additif gaussien $\mathcal{N}(0,0.5)$.

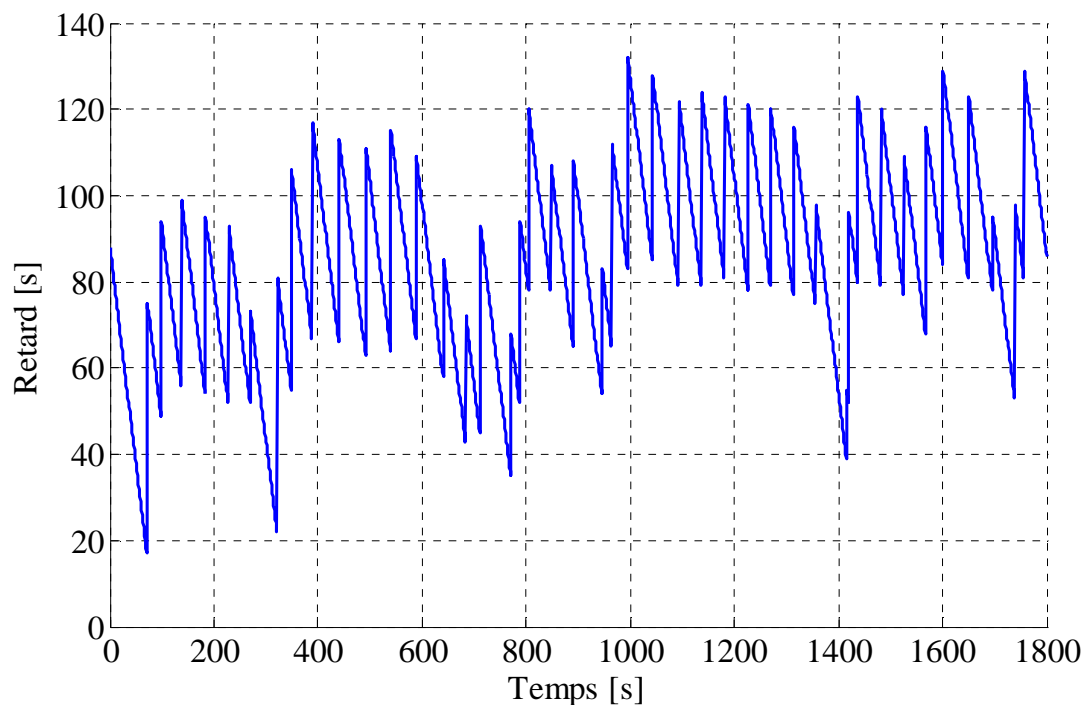


Figure 3.19. *Retard à l'identification.*

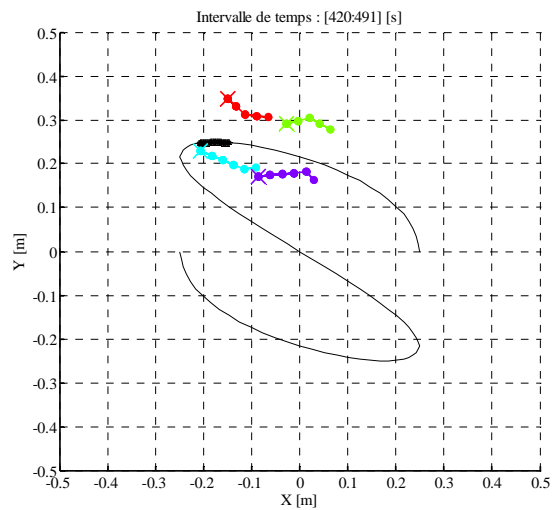
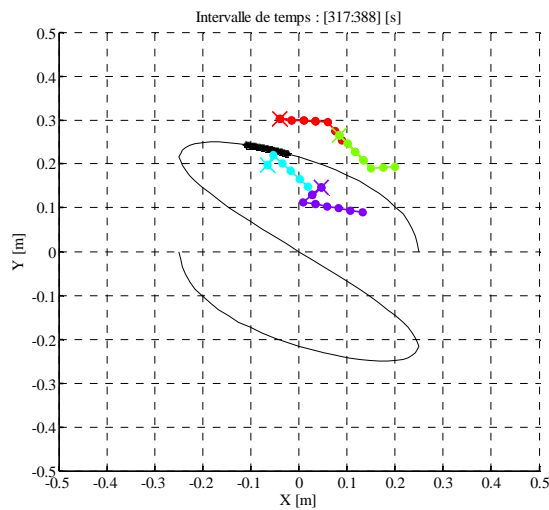
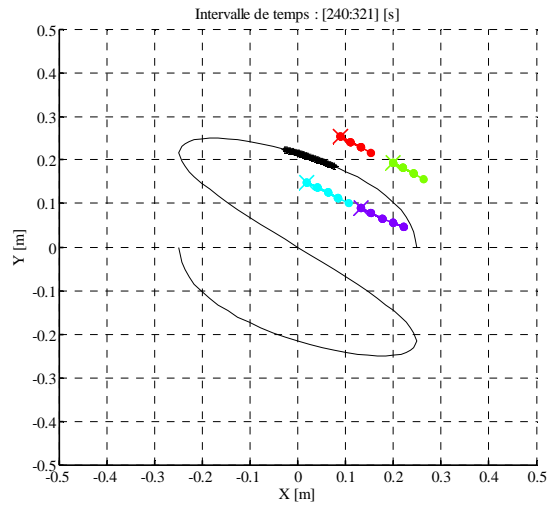
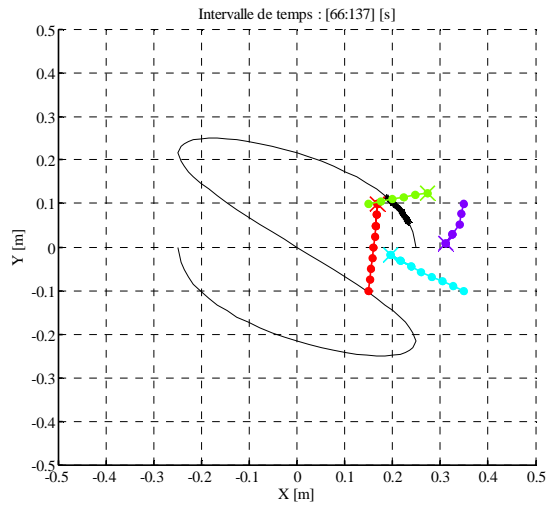
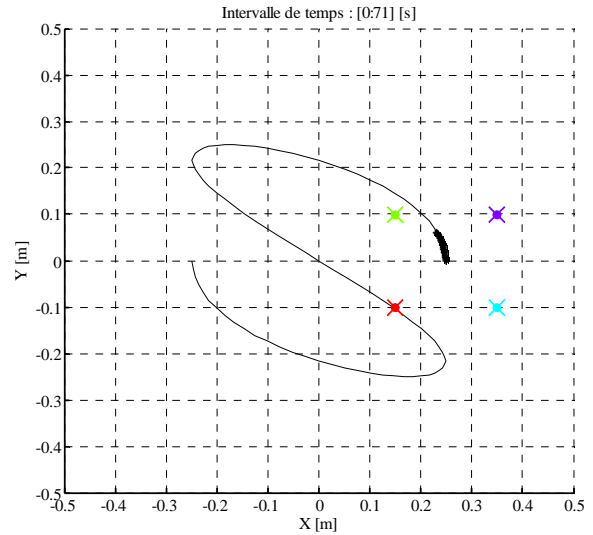
L'évolution du retard d'identification entre les données réelles disponibles et les données identifiées est portée sur la Figure 3.19. Le retard moyen d'identification est de 85 secondes.

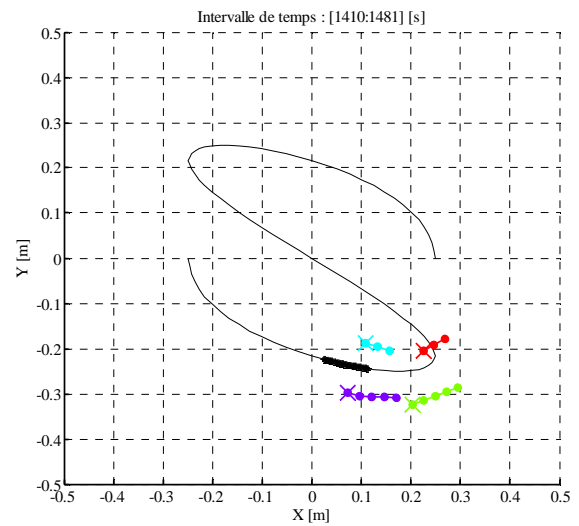
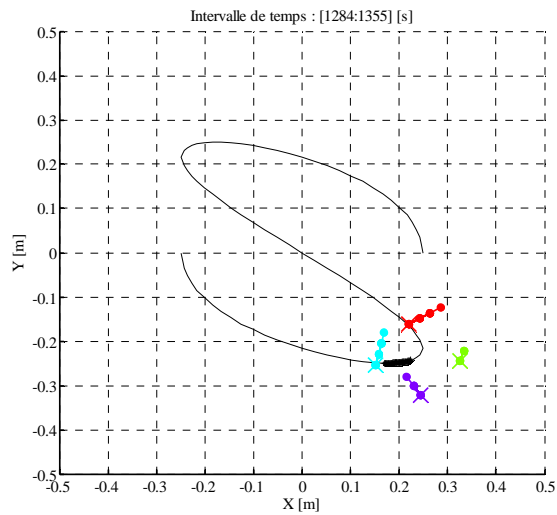
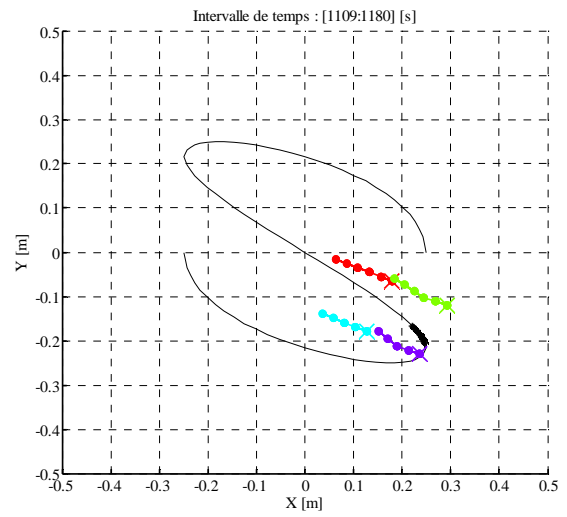
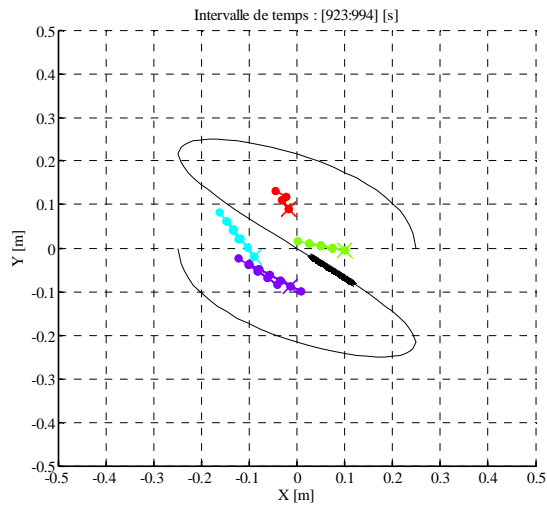
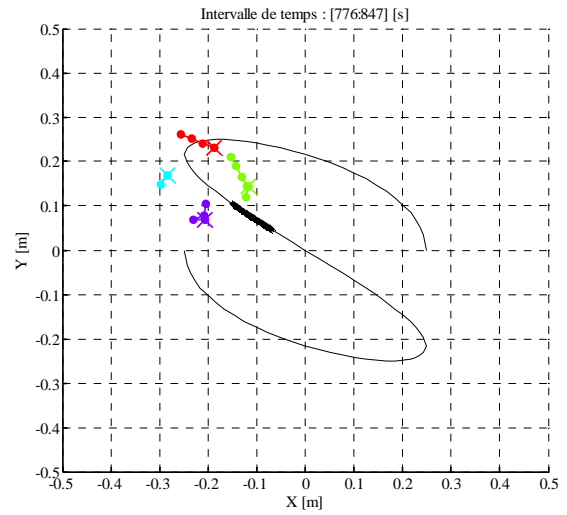
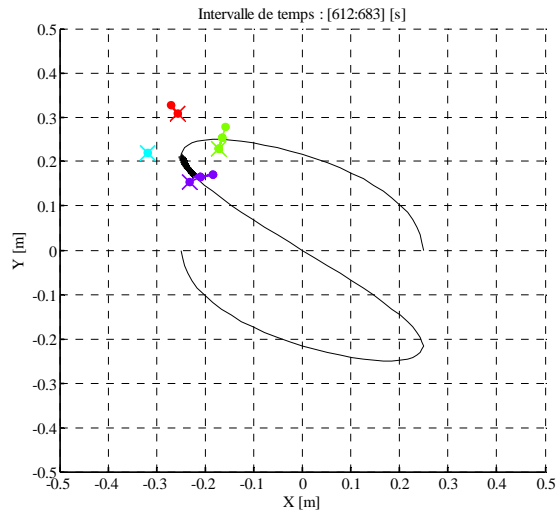
Les figures présentées ci-dessous illustrent l'évolution des positions des différents capteurs au cours du temps. Pour plusieurs intervalles d'identification, le positionnement des capteurs sur ces intervalles de temps est illustré ainsi que la trajectoire courante estimée.

Légende :

- Trajectoire Réelle
- * Trajectoire estimée
- ✕ Capt n°1
- ✕ Capt n°2
- ✕ Capt n°3
- ✕ Capt n°4

Note : les croix sur les trajectoires représentent les positions des robots aux derniers temps de l'intervalle de temps courant.





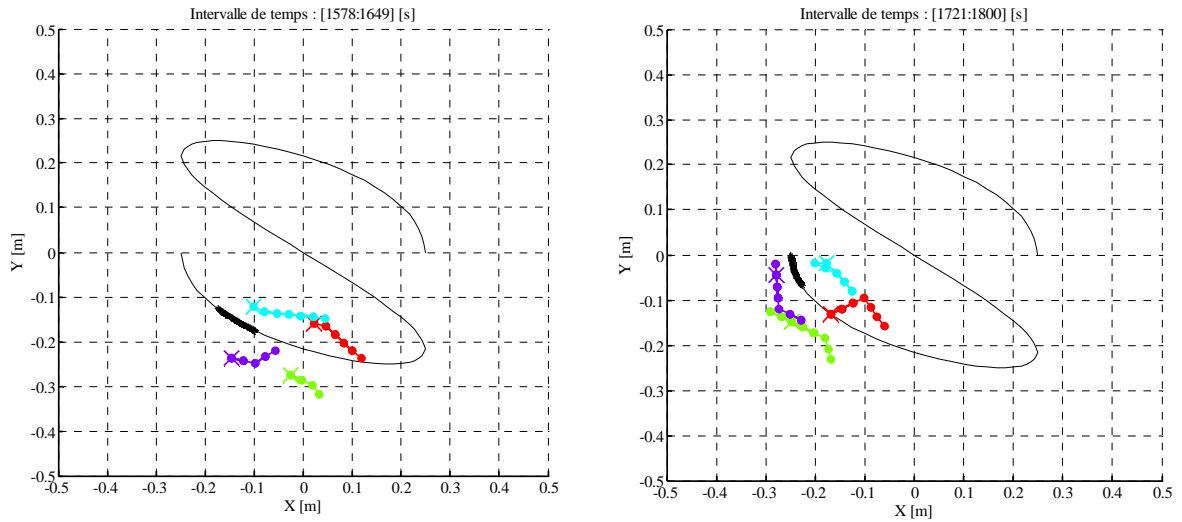


Figure 3.20. Représentation des trajectoires des capteurs sur différents intervalles d'identification.

La Figure 3.20 illustre le comportement des capteurs mobiles. En effet, sur les différentes images l'ensemble des capteurs suit bien l'évolution de la source chauffante mobile. Les résultats présentés mettent aussi en évidence l'efficacité de l'utilisation de robots mobiles embarquant des observateurs pour une identification de paramètres inconnus de systèmes régis par des EDPs.

3.4. Bilan

Dans cette section, deux stratégies de déploiements de capteurs pour une identification de trajectoire d'une source chauffante mobile avec une procédure d'identification quasi en ligne sont présentées. La première stratégie (paragraphe 3.3.1) est basée sur l'utilisation de l'algorithme de choix de capteurs dans un réseau fixe (paragraphe 2) couplé avec la méthode du gradient conjuguée en ligne et l'utilisation du problème de sensibilité pour définir les nouveaux emplacements de capteurs. Cette première méthode montre son efficacité compte tenu du temps de convergence de l'algorithme et des résultats. Néanmoins un choix sur la discrétisation spatiale des zones d'intérêt (étape n°1 de l'algorithme de la méthode) doit être défini avec précaution. Une seconde stratégie a été présentée dans cette section (paragraphe 3.3.2). Son efficacité a été prouvée compte tenu du temps de convergence de l'algorithme et des résultats sur l'estimation de la trajectoire. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle nécessite moins de capteurs. En effet, le fait que les zones d'intérêts des mesures ne sont pas assujetties à des emplacements prédéterminés permet une plus grande liberté dans le

déplacement des capteurs et donc une meilleure sensibilité. Les perspectives de cette étude visent à utiliser cette méthode sur un procédé réel.

4. Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, une présentation de différentes méthodes de placement optimal de capteurs a été proposée. Ces différentes méthodes se basent généralement sur des méthodes visant à utiliser la matrice d'information de Fisher permettant de définir un ensemble de points optimaux pour le placement d'observateurs. Ces méthodes sont cependant appliquées sur des procédures d'identification hors-ligne (i.e l'identification est réalisée une fois l'expérimentation terminée).

Dans l'objectif de réaliser des identifications paramétriques en ligne, une étude préliminaire a été présentée en deuxième partie visant à proposer une méthode basée sur les solutions du problème de sensibilité de la méthode du gradient conjugué afin de sélectionner un sous ensemble de capteurs parmi un réseau fixe. Cette méthode d'estimation avec choix de capteurs en ligne permet d'améliorer la rapidité de convergence des algorithmes puisque les capteurs les plus sensibles sont utilisés pour l'identification. Les capteurs les moins sensibles sont écartés afin d'éliminer le bruit parasite pour la procédure d'identification.

Finalement, une présentation de deux procédures d'estimation en ligne avec déploiement de capteurs a été proposée dans la dernière partie de ce chapitre permettant ainsi d'utiliser des capteurs mobiles se redéployant au cours du temps de façon à se positionner dans des régions les plus sensibles et améliorer ainsi la problématique du placement optimal de capteurs.

Dans le but de pouvoir tester par le futur la méthode de déploiement adaptatif de capteurs mobiles, une présentation d'une expérimentation actuellement en conception au sein du laboratoire LARIS à Université d'Angers est introduite en annexe B

Conclusion Générale

Cette thèse de doctorat avait pour objectif de proposer une réponse à la problématique sur le placement de capteurs pour le suivi d'un phénomène régi par des équations aux dérivées partielles. Les travaux développés dans cette thèse se sont consacrés plus particulièrement au développement de méthodes permettant l'identification paramétrique en ligne pour des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles. En effet ces méthodes développées dans les différents chapitres sont les bases pour le déploiement de capteurs dans le but de prédire et suivre le comportement de phénomène physiques modélisés sous forme d'EDPs.

Une présentation de quelques techniques de résolution de problèmes inverse a été proposée dans le premier chapitre. Parmi ces méthodes d'estimation deux grandes catégories peuvent être répertoriées. La première catégorie porte sur les méthodes de résolution dites *hors ligne*. Ces méthodes sont appliquées une fois toutes les observations réalisées sur le procédé étudié. Sur les exemples proposés, ces méthodes se révèlent très robustes et très efficaces, toutefois les temps de calcul peuvent être très longs dans le cas de grandes campagnes de mesure ou de grande complexité du système étudié. La deuxième grande catégorie de ces méthodes d'estimation paramétrique, sont les méthodes dites *en ligne*. Ces méthodes offrent l'avantage de permettre une estimation parallèlement à la phase d'acquisition des mesures ce qui réduit significativement les temps de calcul. Néanmoins certaines méthodes récursives classiques peuvent se révéler délicates à mettre en œuvre lors de l'étude de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles. Dans la seconde partie, une adaptation d'une méthode de résolution hors ligne basée sur l'algorithme du gradient conjugué très largement utilisée en génie thermique pour l'étude de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles a été proposée. Cette adaptation vise à coupler les avantages des deux grandes catégories de méthodes (hors ligne et en ligne). Le principe est d'utiliser la méthode du gradient conjugué sur un petit intervalle de temps glissant au cours du temps et au fur et à mesure que de nouvelles observations sont réalisées sur le procédé. Compte tenu des résultats présentés, cette méthode montre son efficacité notamment sur la réduction du temps de calcul tout en permettant de bons résultats sur l'estimation de paramètres inconnus. Dans les chapitres suivants cette adaptation a été présentée et détaillée dans plusieurs contextes (estimation de

sources chauffantes en géométrie 2D, estimation de trajectoire, choix et déploiement de capteurs).

Le deuxième chapitre s'intéressait à une présentation de différentes stratégies d'estimation paramétrique en ligne de paramètres inconnus avec une adaptation de la méthode de régularisation itérative du gradient conjuguée. Les résultats présentés dans la première partie portant sur l'estimation de la densité de flux de deux sources chauffantes mobiles ont mis en évidence l'efficacité de la méthode de résolution en ligne. La stratégie six, présentée en 1.3.4.2 du chapitre 2 visant un choix automatique de la largeur de la fenêtre d'identification et se décalant de manière adaptative sur l'horizon temporelle des mesures s'avère être une stratégie intéressante pour l'estimation quasi en ligne de paramètres inconnus. De plus considérant les résultats obtenus avec cette méthode pour l'estimation en ligne de la densité et de la trajectoire d'une source mobile chauffante présentée dans la seconde partie de ce chapitre, cette stratégie s'avère être une stratégie efficace pour l'estimation en ligne (s'affranchissant ainsi du choix de la taille de fenêtre d'identification).

Dans le troisième chapitre, une présentation de différentes méthodes de placement optimal de capteurs a été proposée. Ces différentes méthodes se basent généralement sur des méthodes visant à utiliser la matrice d'information de Fisher visant à définir un ensemble de points optimaux pour le placement d'observateurs. Ces méthodes sont cependant appliquées sur des procédures d'identification hors-ligne (i.e l'identification est réalisée une fois l'expérimentation terminée). Dans l'objectif de réaliser des identifications paramétriques en ligne une étude préliminaire a été présentée en deuxième partie visant à proposer une méthode basée sur les solutions du problème de sensibilité de la méthode du gradient conjugué afin de sélectionner un sous ensemble de capteurs parmi un réseau fixe. Cette méthode d'estimation avec choix de capteurs en ligne permet d'améliorer la rapidité de convergence des algorithmes puisque les capteurs les plus sensibles sont utilisés pour l'identification. Les capteurs les moins sensibles sont écartés afin d'éliminer le bruit parasite pour la procédure d'identification. Finalement, une présentation d'une procédure d'estimation en ligne avec déploiement de capteurs a été proposée dans la dernière partie de ce chapitre permettant d'utiliser des capteurs mobiles se redéployant au cours du temps de façon à se positionner dans des régions les plus sensibles et améliorer ainsi la problématique du placement optimal de capteurs.

Dans le but de pouvoir tester par le futur la méthode de déploiement adaptif de capteurs mobiles, une présentation d'une expérimentation actuellement en conception au sein du laboratoire LARIS à l'Université d'Angers, est brièvement introduite en annexe B.

Plusieurs documents scientifiques ont été présentés dans différentes conférences nationales et internationales ainsi qu'en revue scientifique internationale (une revue acceptée et 1 autre revue en cours de relecture).

A partir des travaux de recherche présentés dans ce document, il est possible d'envisager plusieurs perspectives.

Sur le plan théorique, une étude spécifique de l'effet du bruit de mesure sur les stratégies de déploiement des capteurs pourrait être réalisée. Il serait en effet intéressant de quantifier la confiance que l'on a dans l'optimisation des trajectoires sachant qu'elles sont basées sur des informations erronées. De même, l'effet filtrant de l'algorithme du gradient conjugué qui permet de rejeter les bruits (hautes fréquences) n'est pas établi dans un contexte général. Il serait intéressant d'étudier cet aspect fondamental pour les systèmes d'équation aux dérivées partielles paraboliques (type équation de la chaleur) linéaires puis de l'étendre aux systèmes non linéaires.

Sur le plan méthodologique, le nombre de sources pourrait aussi être considéré comme une inconnue supplémentaire. Une adaptation des méthodes proposées dans les chapitres deux et trois semble envisageable à court terme. De même, les stratégies de déploiement n'ont pas été mises en œuvre dans le chapitre trois pour l'identification du couple puissance & trajectoire. Il serait possible de dédier certains robots à l'identification du flux et d'autres à l'identification des trajectoires de sources. La meute de capteurs pourrait ainsi être scindée en équipes spécialisées.

Enfin, sur le plan expérimental, le dispositif présenté en annexe B sera utilisé à court terme pour tester la validité et la robustesse des algorithmes proposés dans ce manuscrit. Il sera alors nécessaire de prendre en compte la dimension des robots qui ne peuvent être réduits à des points sur une surface. Les choix retenus pour les capteurs (pyromètres portés par les robots)

imposent une orientation qui complique les trajectoires. Ainsi le point le plus près d'un robot n'est pas forcément le plus atteignable (dans un cas extrême l'orientation est diamétralement opposée). Ces nouvelles contraintes sur les stratégies pour atteindre les meilleurs points doivent être considérées pour définir les trajectoires. A moyen terme, des contraintes environnementales permettant de prendre en compte des obstacles (simulant des immeubles en zone urbaine) comme des zones interdites, devront être élaborées et testées.

Production scientifique

Ci-dessous est présentée la liste des productions scientifiques issues des travaux de recherches présentés dans ce manuscrit.

Revues scientifiques

Perez L., Vergnaud A., « **Observation strategies for mobile heating source tracking - Observation strategies for source tracking** », *High Temperatures - High Pressures*, à paraître.

Vergnaud A., Perez L., Autrique L., « **Quasi online parametric identification of moving heating devices in a 2D geometry** ». *International Journal of Thermal Sciences*, à paraître.

Colloques internationaux

Vergnaud A., Fasquel, J.B., Autrique L. « **Python based internet tools in control education.** » - the 3rd IFAC Workshop on Internet Based Control Education IBCE. Brescia, Italy, 2015

Vergnaud A., Autrique L., Perez L. « **On-line monitoring of surfacic mobile heating sources.** ». *ICIPE 2014 - 8th International Conference on Inverse Problems in Engineering*. Cracow, 2014.

Vergnaud A., Beaugrand G., Gaye O., Perez L., Lucidarme P., Autrique L. « **Quasi on-line identification of temperature-dependent thermal conductivity** ». *ECC 2014 - 13th European Control Conference (ECC)*. Strasbourg, 2014.

Vergnaud A., Lucidarme P., Autrique L., Perez L. « **Adaptative deployment of a mobile sensors networks to optimize the monitoring of a phenomenon governed by partial differential equations** ». *10th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)*. Reykjavik, 2013.

Colloques nationaux

Vergnaud A., Perez L. « **Stratégie de sélection de capteurs pour une identification de flux thermique quasi en ligne** ». *Congrès français de thermique – SFT 2015*. La Rochelle, 2015.

Vergnaud A., Tran T. P., Lucidarme P., Autrique L. « **Stratégies de déploiement de capteurs mobiles pour le suivi de sources mobiles : méthode et prototype** ». *6èmes Journées Doctorales & Journées Nationales GDR MACS (JD-JN-MACS 2015)*. 18-19/06/2015. Bourges, 2015.

Vergnaud A., Tran T. P., Lucidarme P., Perez L., Autrique L. « **Deployment strategies of mobile sensors for monitoring of mobile sources: method and prototype** », *Control Architectures of Robots 2015*, Lyon, 06/2015

Vergnaud A., Perez L. « **De l'identification en ligne de flux thermiques** ». *Congrès français de thermique - SFT 2014*. Lyon, 2014.

Vergnaud A., Perez L., Lucidarme P., Autrique L. « **DARC-EDP : Conception du prototype** ». *Actes des 4ième Journées des Démonstrateurs en Automatique*. Angers, 2013.

Vergnaud A. « **Déploiement adaptatif d'un réseau de capteurs mobiles pour optimiser le suivi d'un phénomène en mouvement régi par des équations aux dérivées partielles** ». *Actes des 5èmes Journées Doctorales & Journées Nationales MACS*. Strasbourg, 2013.

Annexe A

Calcul du retard

Dans cette annexe, les calculs de retards présentés dans les trois premiers chapitres de ce manuscrit sont explicités. Deux configurations sont étudiées dans cette section, une première explication sur le calcul de retard en mode en ligne avec décalage à pas constant est présentée dans un premier temps. Dans un second temps, le calcul avec le mode en ligne à décalage automatique est présenté.

A.1. Décalage à pas constant

Considérons une fenêtre d'identification de 60 secondes avec un pas de décalage constant égale à 15 s. Afin de comprendre le calcul du retard, considérons les éléments suivants :

<i>borne inf :</i>	<i>est la borne inférieure de la fenêtre d'identification</i>
<i>borne sup :</i>	<i>est la borne supérieure de la fenêtre d'identification</i>
<i>Temps de résolution :</i>	<i>est le temps de calcul nécessaire à l'obtention d'une estimation correcte des données recherchées sur l'intervalle de temps courant.</i>
<i>Données disponibles</i>	<i>est l'ensemble des mesures récoltées depuis le début de l'expérimentation (dans ce cas précis, une mesure est disponible toutes les 1 seconde)</i>
<i>Retard</i>	<i>est le retard entre les données disponibles et la dernière valeur de temps estimée sur l'intervalle courant</i>

Tableau A.1. *Calcul du retard avec un mode de décalage à pas constant.*

<i>intervalle courant [s]</i>		<i>Temps de résolution</i>	<i>données disponibles</i>	<i>Retard</i>
<i>borne inf</i>	<i>borne sup</i>	<i>[s]</i>	<i>[s]</i>	<i>[s]</i>
0	60	30	60+30=90	90-60=30
15	75	20	90+20=110	110-75=35
30	90	20	110+20=130	130-90=40
45	105	15	130+15=145	145-105=40

Prenons la première ligne de ce tableau, l'intervalle courant est $\mathcal{T}_i = [0, 60]$ s. Le temps de calcul nécessaire à l'estimation des paramètres inconnus sur cet intervalle est de 30 secondes. A la fin de la procédure d'identification sur \mathcal{T}_i , 90 secondes de données sont disponibles. En effet lorsque l'algorithme de résolution identifie les paramètres inconnus sur l'intervalle de temps courant l'expérimentation récolte toujours des mesures. Donc lorsque la procédure d'identification se termine sur l'intervalle, ici 90 secondes de mesures sont disponibles alors que seulement les 60 secondes de mesures ont été utilisées. Ceci revient donc à un retard d'identification égale à 90-60=30 secondes.

Le principale inconvénient de ce mode de décalage est que le retard est croissant au cours du temps, en effet le retard d'identification ne peut pas être rattrapé (voir Tableau A.1 et la figure A.1).

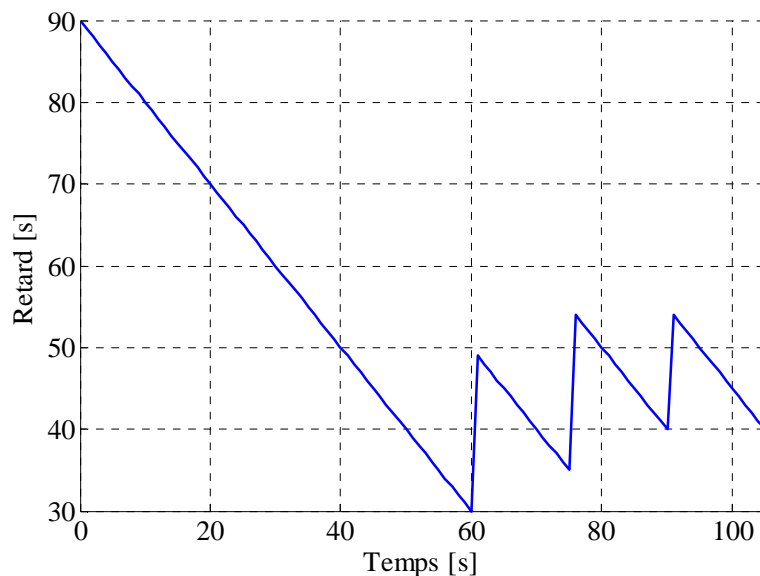


Figure A.1 : *courbe de retard associé au mode de décalage à pas constant.*

La courbe de retard présentée en figure A.1 montre les retards de l'utilisation des mesures disponibles et l'identification. La mesure disponible à $t=0$ a été utilisée pour la procédure d'identification à $t=90$ secondes, alors que la mesure disponible à $t=60$ s a été utilisée 30 secondes après son obtention. La courbe de retard présentée ci-dessus met en évidence le phénomène de croissance du retard.

A.2. Décalage à pas Adaptatif

Considérant une fenêtre d'identification de 60 secondes avec un pas de décalage à pas adaptatif comme présenté dans le chapitre 2. Afin de comprendre le calcul du retard, considérons les éléments suivants :

<i>borne inf :</i>	<i>est la borne inférieure de la fenêtre d'identification</i>
<i>borne sup :</i>	<i>est la borne supérieure de la fenêtre d'identification</i>
<i>Temps de résolution :</i>	<i>est le temps de calcul nécessaire à l'obtention d'une estimation correcte des données recherchées sur l'intervalle de temps courant.</i>
<i>Données disponibles</i>	<i>est l'ensemble des mesures récoltées depuis le début de l'expérimentation (dans ce cas précis, une mesure est disponible toutes les 1 seconde)</i>
<i>Retard</i>	<i>est le retard entre les données disponibles et la dernière valeur de temps estimée sur l'intervalle courant</i>

Tableau A.2 : Calcul du retard avec un mode de décalage à pas constant.

<i>intervalle courant [s]</i>		<i>Temps de résolution [s]</i>	<i>données disponibles [s]</i>	<i>Retard [s]</i>
<i>borne inf</i>	<i>borne sup</i>			
0	60	10	$60+10=70$	$70-60=10$
10	70	80	$70+80=150$	$150-70=80$
40	100	20	$150+20=170$	$170-100=70$
60	120	15	$170+15=185$	$185-120=65$

Prenons la première ligne de ce tableau, L'intervalle courant est $\mathcal{T}_i = [0, 60]$ s. Le temps de calcul nécessaire à l'estimation des paramètres inconnus sur cet intervalle est de 10 secondes. A la fin de la procédure d'identification sur \mathcal{T}_i , 70 secondes de données sont disponibles.

Donc lorsque la procédure d'identification se termine sur l'intervalle, ici 70 secondes de mesures sont disponibles alors que seulement les 60 secondes de mesures ont été utilisées. Ceci revient donc à un retard d'identification égale à $70-60=10$ secondes.

Lorsque l'identification est réalisée sur \mathcal{T}_i , immédiatement un nouvel intervalle de temps est considéré \mathcal{T}_{i+1} . Avec un mode de décalage à pas adaptatif si le temps de calcul nécessaire pour estimer les inconnus sur l'intervalle courant est inférieur à la longueur de l'intervalle alors le nouvel intervalle de temps considéré se décale avec un pas de temps égal au temps de calcul sur l'intervalle précédent. Dans le cas présenté ici, $\mathcal{T}_{i+1} = [10, 70]$. Sinon si le temps nécessaire à la résolution est supérieur à la taille de fenêtre alors le nouvel intervalle est décalé avec un pas de temps égal à la moitié de la taille de la fenêtre. Par exemple, sur $\mathcal{T}_i = [10, 70]$ le temps de calcul nécessaire à l'obtention des estimations de paramètres sur cet intervalle est de 80 secondes donc $\mathcal{T}_{i+1} = [40, 100]$. Ceci a été conçu afin de ne pas prendre un retard trop grand tout en gardant un recouvrement de fenêtre garantissant une meilleure estimation de paramètres.

Le principal avantage de ce mode de décalage est que le retard peut être rattrapé au cours du temps, (voir Tableau A.2 et la figure A.2).

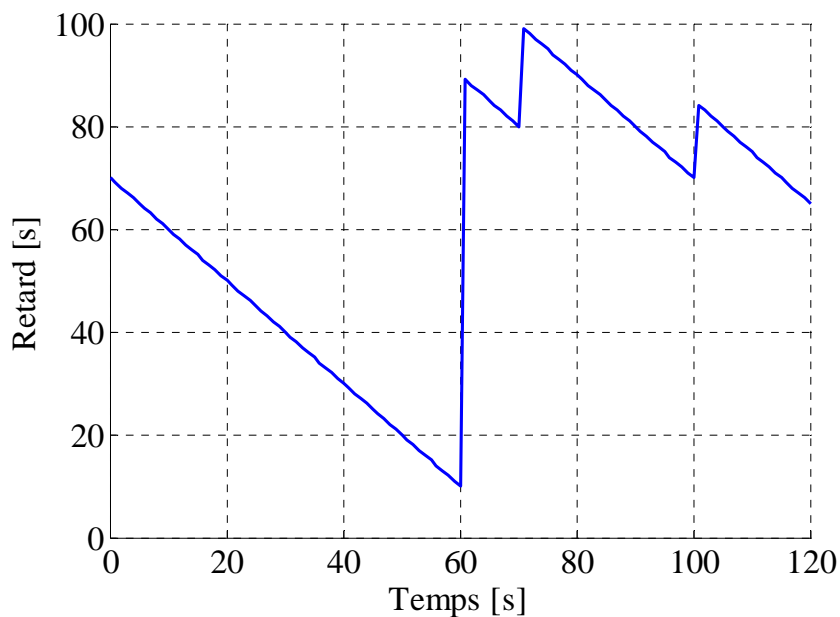


Figure A.2. courbes de retards associées au mode de décalage à pas adaptatif.

La courbe de retard présenté en figure A.2 montre les retards de l'utilisation des mesures disponibles et l'identification. La mesure disponible à $t=0$ a été utilisée pour la procédure d'identification à $t=70$ secondes, alors que la mesure disponible à $t=60$ s a été utilisée 10 secondes après son obtention. La courbe de retard présenté ci-dessus met en évidence le phénomène de rattrapage du retard.

Annexe B

Conception du prototype

Afin d'illustrer l'intérêt des méthodes proposées dans le chapitre 3 sur les procédures de déploiements de capteurs et la mise en œuvre pratique de cette approche, un dispositif expérimental a été conçu pour l'identification de la trajectoire et de la puissance d'une (ou plusieurs) sources évoluant sur une plaque métallique fine. Cette expérimentation, actuellement en cours de conception et de réalisation, qui a pour objet de tester la validité de différentes stratégies de déplacements de capteurs est décrite ci-après.

B-1 - Description globale du système

Le dispositif a pour objet de valider une méthode d'identification quasi en ligne pour un problème inverse de conduction de la chaleur. Aussi, ce banc n'est pas dédié à un procédé thermique spécifique. Les sources chauffantes sont embarquées sur des robots mobiles qui évoluent sur une plaque d'aluminium fine d'environ 9m² et d'épaisseur 2mm (Figure B.2) posée sur de la laine de roche (Figure B.3). La puissance des sources de chaleur est réglée de manière à décrire différents profils d'évolution. Sur cette même plaque, plusieurs robots mobiles sont équipés de pyromètres afin de mesurer la température de la plaque de manière quasi ponctuelle. Les températures mesurées ainsi que la position des points de mesures sont transmises à un ordinateur central via une technologie sans-fil (WiFi). Les problèmes inverses pour l'identification seront ensuite résolus quasi en ligne. Les trajectoires des pyromètres sont estimées tout au long du procédé et envoyées aux robots observateurs qui se déplacent alors vers leurs prochaines positions (voir chapitre 3 paragraphe 3). La position absolue des robots étant nécessaire au bon fonctionnement du système (robustesse de la procédure d'identification), un système de localisation globale par vision est utilisé (en complément de la mesure odométrique). Une caméra est positionnée au-dessus de la plaque ; les différentes mesures de position obtenues par vision sont synchronisées avec celles envoyées par les robots observateurs pour une éventuelle correction. Le dispositif présenté dans cette communication est schématisé Figure B.1.

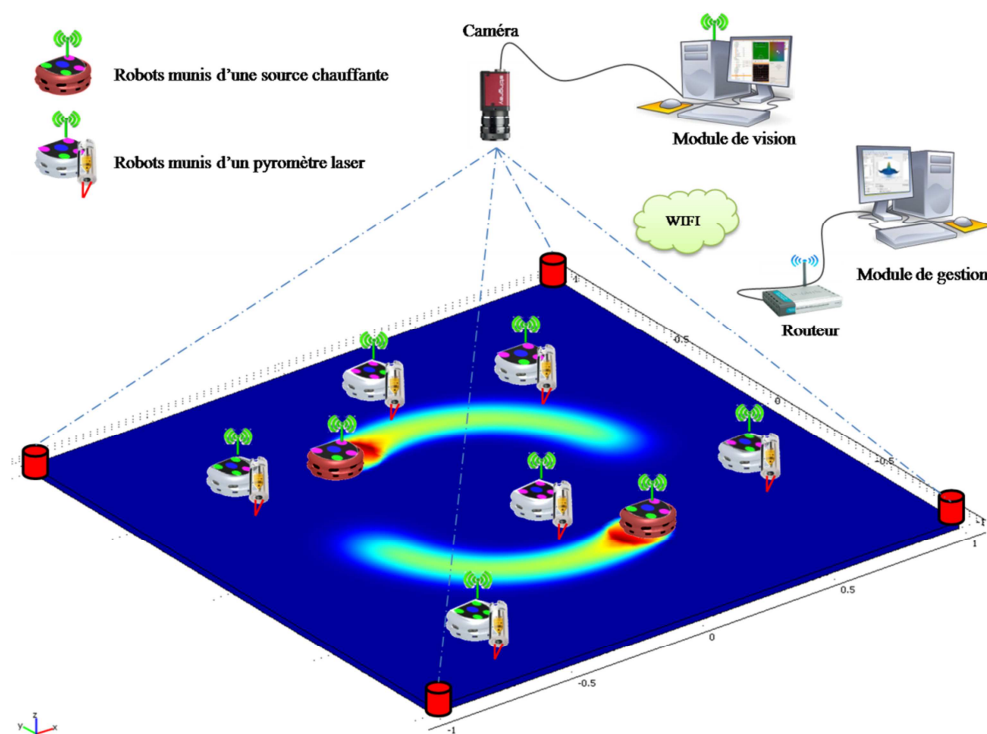


Figure B.1. *Prototype du système de vision*



Figure B.2. *Plaque d'aluminium recouverte de peinture noir mate*



Figure B.3. *Laine de roche*

B-2 - Les différents éléments constitutifs

B-1-1. Les sources chauffantes

Une chauffe sans contact a été retenue afin d'éviter les problèmes inhérents aux déplacements des sources mobiles. Il s'agit d'ampoules halogènes Philips (Figure B.2) de deux types différents (24V, 250W, GX5.3) et (36V, 400W, GY6.35) , pilotées par des alimentations programmables. Ces ampoules (Figure B.4) permettent une chauffe radiative $\phi_{chauf}(x, y; t)$ dont on suppose que la composante temporelle est uniquement liée au pilotage de l'alimentation. En effet, le retard inhérent à la chauffe du filament est considéré comme négligeable par rapport à la durée de l'expérimentation (environ 30 minutes) et aux dynamiques retenues pour les montées en température.



24V, 250W, GX5.3



36V, 400W, GY6.35

Figure B.4. *Les sources chauffantes.*

B-1-2. Les capteurs

Pour les mesures de températures, les pyromètres Optris® CSlaser-LT-CF1 ont été choisis (Figure B.5) afin de réaliser une acquisition sans contact (ce qui évite de perturber le milieu et facilite le déplacement des capteurs). Leur géométrie est celle d'un cylindre d'environ 10cm de long et 5cm de diamètre pour une masse d'environ 600g. La distance de mesure entre le pyromètre et la plaque est de 7cm et le diamètre du disque de mesure (correspondant à 90% du rayonnement émis) est de 1.4mm. Les pyromètres fournissent ainsi une température moyenne sur des zones d'environ 2mm².

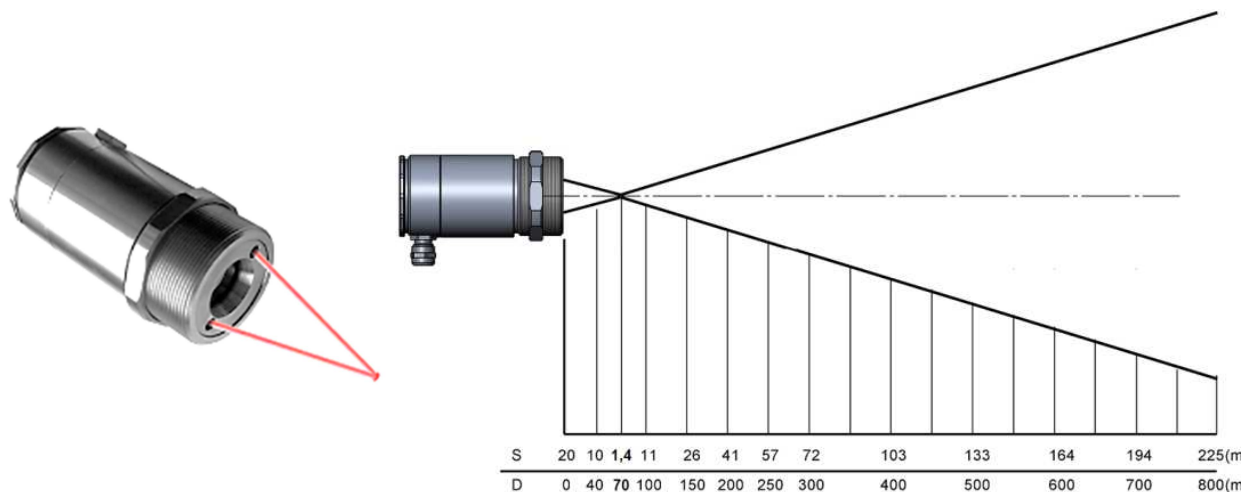


Figure B.5. *Le pyromètre Optris® CSlaser-LT-CF1.*

Pour chaque robot équipé d'un pyromètre délivrant un courant en sortie sur la plage 4-20mA, un convertisseur analogique numérique de 10 bits (intégré dans la carte entrée/sortie KoreIO branchée sur la carte d'extension des robots) traite les valeurs analogiques. Le courant n'est

pas une entrée directe de la carte. En effet, une résistance de 250Ω est ajoutée afin d'obtenir des valeurs de la tension quasi linéaire sur la plage de 1-5V correspondant à la plage de température $\theta \in [273, 773]$ en K. La température mesurée est calculée en se basant sur la valeur numérique du convertisseur avec une résolution de 0.1K. Le robot envoie alors à l'ordinateur de gestion une trame (en utilisant le protocole TCP/IP serveur/client) contenant la position et la température relevée à cette position ainsi que l'heure d'acquisition.

B-1-3. Les robots

Pour déplacer les sources et les pyromètres, les robots Khepera-III (Figure B.6) développés par la société K-Team de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne ont été choisis (Mandola, et al., 1999). Le diamètre de chaque robot est de 13cm pour une hauteur de 7cm. Ils sont capables de déplacer une charge inférieure à 2kg à une vitesse maximale de 50cm/s.



Figure B.6. Robot Khepera-III équipé d'un pyromètre et Caméra Stingray F-046C.

L'autonomie affichée est de 8h (à vitesse constante et sans la plateforme embarquée Korebot-II) alors que la durée des campagnes expérimentales prévues est de l'ordre de 30 minutes. Une carte réseau WiFi (norme 802.11b/g) est intégrée à chaque robot afin de permettre sa connexion à l'ordinateur de gestion via un routeur WiFi grâce auquel ils peuvent échanger des informations sous la forme de trames de données en utilisant le protocole TCP/IP (serveur/client).

B-1-4. La caméra

Le logiciel SSL-vision (Martinez-Gomez & Weitzenfeld, 2004), (Zickler, et al., 2009) est utilisé afin de surveiller et de corriger le déplacement des robots. Une caméra visible Stingray F-046C développée par Allied Vision Technologies disposant d'une résolution de 780x580 pixels et d'une fréquence d'acquisition de 55Hz a été choisie. Cette caméra (Figure B.6) est

positionnée au-dessus de la plaque à environ 150cm de hauteur de telle façon que tous les robots soient surveillés. Cette dernière est câblée avec l'ordinateur de vision via le port FireWire 1394b.

B-1-5. Le routeur Wifi

Pour l'interconnexion entre les dispositifs en profitant de la technologie de communication sans-fils, un routeur Wifi a été choisi. Cet équipement de référence TL-WR740N de TP-LINK, combine les modes filaires et sans-fil. Ce routeur Wifi N est compatible avec la norme 802.11b/g et peut permettre, à une distance d'interconnexion inférieure à 25m, une vitesse maximale de transfert jusqu'à 150 Mbps.

B-3. Protocole de communication

Le protocole de communication TCP/IP (Transmission Control Protocol/Internet Protocol) est actuellement le plus utilisé (compte tenu de sa fiabilité) dans les réseaux locaux et Internet entre 2 programmes ou 2 machines (un client et un serveur). La couche TCP assure que les données envoyées sont toutes reçues par la machine destinataire. Le protocole d'échange de données entre le client et le serveur via les sockets (interfaces de connexion) réseaux TCP/IP est modélisé Figure B.7.

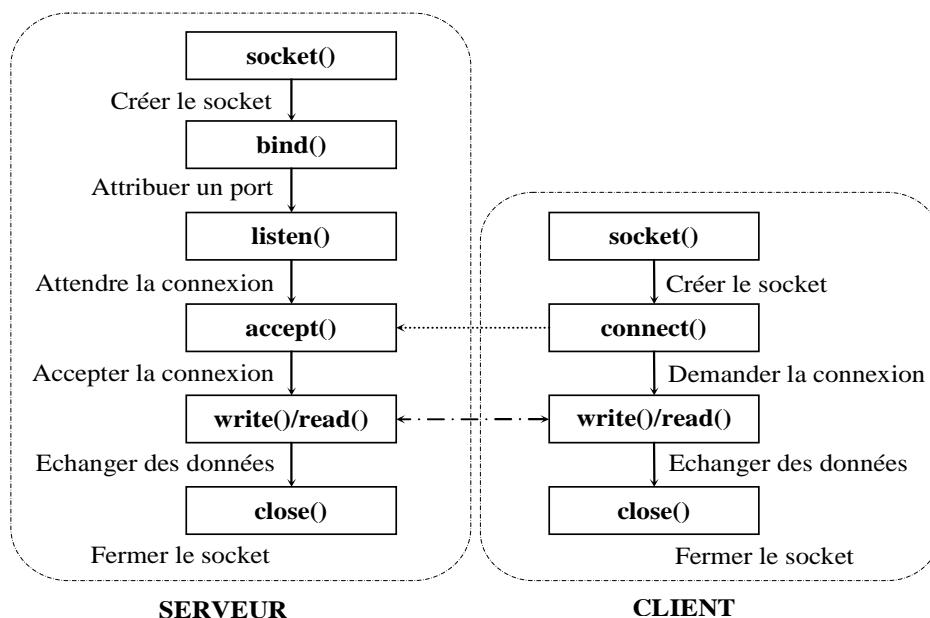


Figure B.7. *protocole d'échanges TCP/IP.*

Le routeur WIFI est l'élément central de cette expérimentation ; il est le seul lien entre l'ensemble des robots, le module de vision et le module de contrôle intelligent (voir Figure B.1). Il gère la connexion des robots au module de gestion (de l'ensemble des capteurs et des sources mobiles) et au module d'identification paramétrique. Ces différents éléments possèdent chacun une adresse IP unique permettant ainsi le dialogue entre eux. Ces éléments ouvrent une socket d'écoute et attendent une demande de connexion provenant d'une autre machine. Lorsqu'une tierce machine tente de se connecter à la machine hôte celle-ci active la connexion et le dialogue entre les deux machines est mis en place. Les données sont échangées sous forme de trames de données qui sont codées de manière spécifique.

B-4. Localisation basée sur la vision

Les robots Khepera III disposent de roues codeuses permettant de calculer le déplacement relatif effectué lors de la mise en marche des moteurs (mesure odométrique). Cependant, les frottements entre les roues du robot et la plaque engendrent des biais (en particulier lors des virages serrés) sur le déplacement réel du robot. Afin de corriger ces erreurs, une vérification du positionnement robot est mise en place via le logiciel de traitement d'images (logiciel SSL-vision (Martinez-Gomez & Weitzenfeld, 2004) , (Zickler, et al., 2009)). Le calcul du positionnement du robot par rapport à la plaque est réalisé par traitement d'image. Le logiciel utilise les images fournies par la caméra et détecte des marqueurs préalablement enregistré (Figure B.1). Ces marqueurs servent d'identifiant unique ; ainsi en apposant un marqueur sur chaque robot, il est possible de connaître son positionnement (x_0, y_0) et son orientation α_0 dans un repère Oxy . Une fois les nouvelles coordonnées calculées, celles-ci sont comparées avec les mesures odométriques des robots afin d'estimer au mieux les coordonnées des robots sur la plaque. Après traitement des mesures et procédure d'identification quasi en ligne, chaque robot reçoit une trame de données qui contient ses coordonnées actuelles (x_0, y_0) , son orientation actuelle (α_0) et la position désirée (x_1, y_1) . Il calcule alors une trajectoire pour se déplacer de la position actuelle (x_0, y_0, α_0) à la position désirée (x_1, y_1) en évitant les obstacles (le cas échéant). A l'aide du logiciel SSL-vision, les positions des robots sont mises à jour chaque seconde afin de corriger les erreurs de déplacement et d'éviter d'accroître l'imprécision sur les mesures de température.

Annexe C.

Validation du modèle 2D

Dans l'ensemble de ce manuscrit, un modèle thermique en géométrie 2D a été considéré et utilisé comme une bonne approximation des transferts thermiques dans une plaque fine. Néanmoins, afin de valider le modèle pour le prototype expérimental une étude visant à étudier les erreurs engendrées par une approximation en géométrie 2D a été investiguée et est présentée dans cette section.

Dans cette étude, l'hypothèse d'une géométrie 2D (plaque infiniment fine) a été considérée afin de réduire les temps de calcul. Cette hypothèse est valide si on peut négliger les transferts de chaleurs dans l'épaisseur de la plaque. Pour ce faire, il est nécessaire de considérer une plaque fine d'un métal de conductivité thermique élevée. Pour des raisons financières, l'aluminium a été retenu. Cette plaque carrée de 3 m de côté est posée horizontalement sur un support assurant l'isolation. Ce dernier est composé de laine de roche, isolant thermique supportant les hautes températures.

Afin de vérifier que les transferts thermiques sont bien surfaciques sur la plaque d'aluminium, deux modèles mathématiques ont été comparés. Le premier système (C.1) correspond à l'hypothèse retenue : la température $\theta(x, y; t)$ en chaque point (x, y) de la plaque Ω et à chaque instant $t \in T$ satisfait :

$$\begin{cases} \forall (x, y; t) \in \Omega \times T & \rho c \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y; t) = \Phi \\ \forall (x, y) \in \Omega & \theta(x, y; 0) = \theta_0 \\ \forall (x, y; t) \in \partial \Omega \times T & -\lambda \frac{\partial \theta(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 \end{cases} \quad (C.1)$$

où ρc est la chaleur volumique en $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$, λ est la conductivité thermique en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, θ_0 en K est la température ambiante (égale à celle du milieu ambiant), \vec{n} est le vecteur

unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$. Le flux $\Phi(x, y; t)$ correspond aux sources chauffantes surfaciques ϕ_{chauf} ainsi qu'aux échanges convectifs avec la face supérieure. La face inférieure est en condition adiabatique.

$$\Phi(x, y; t) = \frac{\phi_{chauf}(x, y; t) - h(\theta(x, y; t) - \theta_0)}{e}$$

où h est le coefficient d'échange convectif en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et e est l'épaisseur de la plaque en m. Le second système (C.2) correspond à la plaque d'aluminium de 9 m^2 , d'épaisseur e posée sur une plaque de laine de roche d'épaisseur $e_r = 4.5\text{ cm}$. Il s'agit de panneau de laine de roche, mono densité, semi-rigide, revêtu d'un pare-vapeur kraft polyéthylène. La référence de ce matériau est Rockwool-Rockmur-Kraft. Le modèle mathématique décrivant les transferts thermiques en géométrie 3D est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (x, y, z; t) \in \Omega \times T & \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \Delta \theta = 0 \\ \forall (x, y, z) \in \Omega & \theta(x, y; 0) = \theta_0 \\ \forall (x, y, z; t) \in \partial\Omega_{lat} \times T & -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \\ \forall (x, y, z; t) \in \partial\Omega_{sup} \times T & -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = -e\Phi \\ \forall (x, y, z; t) \in \partial\Omega_{inf} \times T & -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{1}{R}(\theta - \theta_0) \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

où $\partial\Omega_{lat}$ est la surface latérale de la plaque d'aluminium et $\partial\Omega_{sup}$ (resp. $\partial\Omega_{inf}$) la face supérieure (resp. inférieure). Le coefficient R représente la résistance thermique surfacique, appelée aussi coefficient d'isolation thermique surfacique et s'exprime en $\text{m}^2.\text{K.W}^{-1}$. Afin de considérer si l'hypothèse de transfert thermique bidimensionnelle est valide, les températures prédites par les modèles (1) et (2) sont comparées pour un jeu de paramètres indiqués dans la tableau C.1.

Tableau C.1. Paramètres d'entrée des modèles (C.1) et (C.2) en unité SI.

$\rho c = 2.4 \cdot 10^6$	$\lambda = 237$	$h = 15$	$R = 1.2$
$\phi_{chauf}(x, y; t) = 10^5 e^{-10^3 d^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{1200}\right)$			$\theta_0 = 291$

Dans le tableau C.1, $d(x, y)$ est la distance entre le point (x, y) et le centre de la face supérieure de la plaque d'aluminium. On peut noter que la configuration 3D étudiée est axisymétrique. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles (1) et (2) sont résolus à l'aide de la méthode des éléments finis [3] mise en œuvre par le code Comsol interfacé avec Matlab. Sur la figure C.1, les évolutions de température en différents points de la face supérieure de la plaque sont présentées pour une plaque d'épaisseur $e=2\text{mm}$.

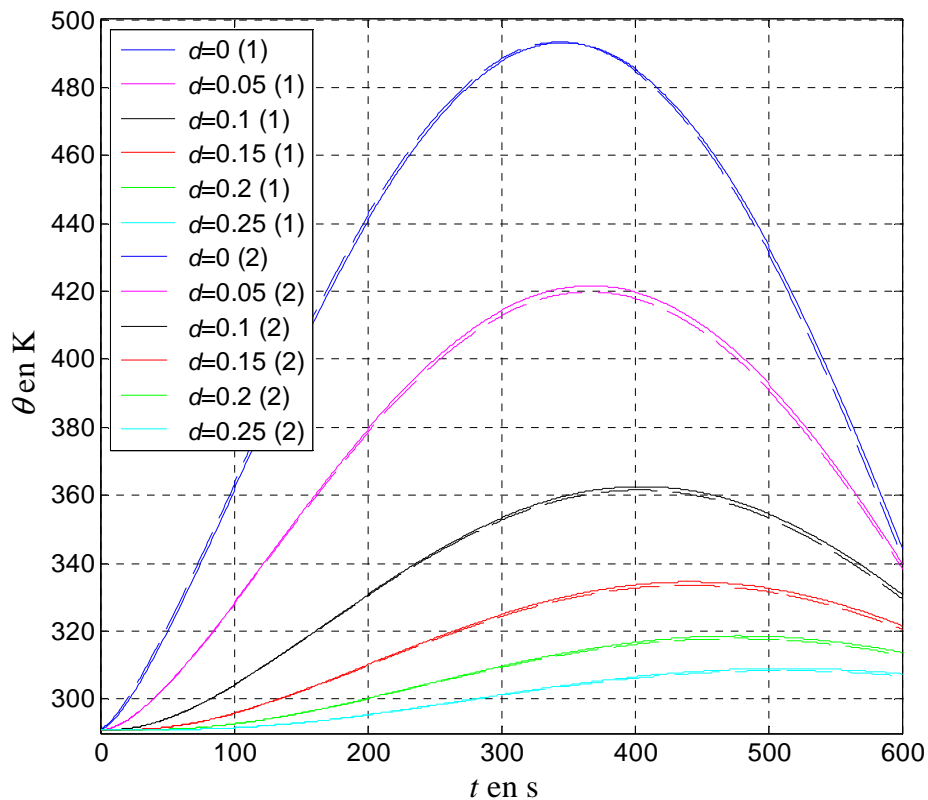


Figure C.1. Comparaison entre les modèles 2D et 3D.

La figure C.1 illustre que le modèle 2D est très satisfaisant pour des points situés proches de la source chauffante. Pour des points éloignés de la source, des faibles erreurs de modèle seront présentes. Le tableau C.2 indique en différents points l'erreur moyenne absolue $emod$ entre les deux modèles, ainsi que l'écart moyen absolu de température entre 2 points situés de part et d'autre de la plaque (information $ecart$ obtenue avec le modèle (C.2)).

Tableau C.2. Comparaisons entre les deux modèles.

d	0 cm	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm
$emod$	1.4 K	1.2 K	0.7 K	0.6 K	0.4 K
$ecart$	0.3 K	0.02 K	0.003 K	0.002 K	0.001 K

Considérant la figure C.1 et le tableau C.2, l'hypothèse des transferts bidimensionnels est retenue pour une plaque d'aluminium de 2mm d'épaisseur posée sur des panneaux de la laine de roche d'épaisseur 4.5cm. La masse d'une telle plaque de 9 m² est légèrement inférieure à 50 kg.

Bibliographie

Abou Khachfe, R., 2000. Résolution numérique de problèmes inverses 2D non linéaires de conduction de la chaleur par la méthode des éléments finis et l'algorithme du gradient conjugué- Validation expérimentale., Thèse de l'Université de Nantes, LTN, Polytech-Nantes.

Alaña, J. E., 2010. Optimal measurement locations for parameter estimation of non linear distributed parameter systems.. *Braz. J. Chem. Eng.*, 27(4), pp. 627-642.

Alaña, J. E. & Theodoropoulos, C., 2011. Optimal location of measurements for parameter estimation of distributed parameter systems. *Computers & Chemical Engineering*, 35(1), pp. 106-120.

Alifanov O.M., 1994. *Inverse heat transfer problems*. Berlin, ED. Springer-Verlag.

Alifanov, O.M., 1974. Solution of an Inverse Problem of Heat-Conduction by Iterative Methods. *Journal of engineering physics*, 26(4), pp. 471-476.

Alifanov, O. M., Artiukhin, E. A. & Rumiantsev, S. V., 1995. *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems With Applications to Inverse Heat Transfer Problems*. New-York: Begell House.

Artyukhin, E., Ivanov, G. & Nenarokomov, A., 1993. Determining the set of thermophysical properties of materials from unsteady-state temperature measurements. *High Temperature*, 32(2), pp. 199-202.

Artyukhin, E., Killikh, V. & Okhapkin, A., 1984. Reconstructing the effective coefficient of thermal conductivity of asbestos-textolite from the solution of the inverse problem. *Journal of engineering physics*, 45(5), pp. 1281-1286.

Aster, R. C., Borchers, B. & Thurber, C. H., 2013. *Parameter Estimation and Inverse Problems, Second Edition*. Waltham: Academic Press.

Bautin, A., Simonin, O., Charpillat, F., 2012. Stratégie d'exploration multi-robot fondée sur les champs de potentiels artificiels. *RIA Revue d'Intelligence Artificielle*, 26(5), pp. 523-542.

- Beck, J. M., Blackwell, B. & St Clair, C. K., 1985.** *Inverse Heat Conduction Ill-Posed*. New-York: ED John Wiley and Sons Inc.
- Beddiaf, S., 2013.** *Identification paramétrique de systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires en géométrie 3D par une méthode de régularisation itérative*. Angers, Thèse de l'université d'Angers, LARIS.
- Beddiaf, S., Autrique, L., Perez, L. & Jolly, J. C., 2012.** *Time-dependent heat flux identification: Application to a three-dimensional inverse heat conduction problem*. Wuhan-China, 4th Int. Conf. on Modelling, Identification and Control.
- Beddiaf, S., Perez, L., Autrique, L. & Jolly, J.-C., 2014.** Simultaneous determination of time-varying strength and location of a heating source in a three-dimensional domain. *International Journal of Inverse Problems in Science and Engineering*, 22(1); pp. 166-183.
- Borne, P. et al., 1992.** *Modélisation et identification des processus*. Paris: Editions Technip.
- Carotenuto, L., Muraca, P. & Raiconi, G., 1987.** Optimal location of a moving sensor for the. *International Journal of Control*, 46(5), pp. 1671-1688.
- Carvalho, G. & Silva Neto, A. J., 1999.** *An inverse analysis for polymers thermal properties estimation*. Port Ludlow, USA,, pp. 495-500.
- Cassandras, C. & Li, W., 2005.** Sensor networks and cooperative control. *European journal of Control*, 11(4-5), p. 436–463.
- Chen, M., Berkowitz-Mattuck, J. & Glaser, P., 1963.** The use of a kaleidoscope to obtain uniform flux over a large area in a solar or arc imaging furnace. *Applied Optics*, 2(3), pp. 265-271.
- Chen, Y. & Tricaud, C., 2008.** *Optimal interlaced Mobile Sensor Motion Planning and parameter estimation for Distributed Parameter Systems*. Knoxville, Tennessee, Proceedings of 2008 NSF Engineering Research and Innovation Conference,.
- Corriou, J.-P., 2010.** *Méthodes numériques et optimisation - Théorie et pratique pour l'ingénieur*. Paris: ED Lavoisier TEC & DOC.
- Crinière, A., Dumoulin, J., Perez, L. & Bourquin, F., 2014.** *Civil engineering structure daily monitored through IR Thermography and environmental measurement..* Bordeaux, 12th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography.

Demetriou, M., 2000. *Activation policy of smart controllers for flexible structures with multiple actuator/sensor pairs.* Perpignan, Proc. 14th Int. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems.

Demetriou, M., Paskaleva, A., Vayena, O. & Doumanidis, H., 2003. Scanning actuator guidance scheme in a 1-D thermal manufacturing process. *IEEE Transactions*, 11(5), pp. 757-764.

El Jai, A., 1991. Distributed systems analysis via sensors and actuators. *Sensors and Actuators A*, 29(1), pp. 1-11.

El Jai, A. & Pritchard, A. J., 1988. *Sensors and controls in the analysis of distributed systems.* New-York: John Wiley & sons.

Fedorov, V., 1972. *Theory of Optimal Experiments.* 1 éd. New York: Academic Press.

Fedorov, V. V. & Hackl, P., 1997. *Mode Oriented Design of Experiments.* 1 éd. New York: Springer.

Gaspar, J. et al., 2013. Nonlinear heat flux estimation in the JET divertor with the ITER like wall. *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 72, pp. 82-91.

Gazzola, S. & Novati, P., 2014. Automatic parameter setting for Arnoldi–Tikhonov methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 256, pp. 180-195.

Gejadze, I. & Jarny, Y., 2002. An inverse heat transfer problem for restoring the temperature field in a polymermelt flow through a narrow channel.. *International Journal of thermal sciences*, Volume 41, pp. 528-535.

Gillet, M., 2009. *Analyse de systèmes intumescents sous haut flux : Modélisation et identification paramétrique.* Font Rommeu: Thèse de doctorat de l'université d'angers - LISA.

Hadamard, J., 1932. *Le Problème de Cauchy et les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires Hyperboliques.* Paris: ED Hermann.

Hasanov, A. & Pektas, B., 2013. Identification of an unknown time-dependent heat source term from overspecified Dirichlet boundary data by conjugate gradient method. *Computers & Mathematics with Applications*, 65(1), pp. 42-57.

Hestenes, M. R. & Stiefel, E., 1952. Methods of conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(6), pp. 409-436.

- Huang, C. H. & Özişik, M., 1990.** A direct integration approach for simultaneously estimating spatially varying thermal. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 11(3), pp. 262-268.
- Isakov, V., 1998.** *Inverse problems for partial differential equations*. New-York: Springer-Verlag.
- Jarny, Y., Ozisik, M. N. & Bardon, J. P., 1991.** A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(11), pp. 2911-2919.
- Keller, J. B., 1976.** Inverse Problems. *The American Mathematical Monthly*, 83(2), pp. 107-118.
- Kern, M., 2002-2003.** *Problèmes inverses - Support de cours de l'Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci*. [Accès le 8 Janvier 2015] Disponible à l'adresse: <https://who.rocq.inria.fr/Michel.Kern/Teaching/ESILV/inverse.pdf>.
- Khapalov, A., 1992.** Optimal measurement trajectories for distributed parameter systems. *Systems and Control Letters*, 18(6), pp. 467-477.
- Kiefer, J. & Wolfowitz, J., 1959.** Optimum Designs in Regression Problems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 30(2), pp. 271-294.
- Kubrusly, C. S. & Malebranche, H., 1985.** Sensors and controllers location in distributed systems—A survey. *Automatica*, 21(2), pp. 117-128.
- Landau, I. D., 2002.** *Commande des systèmes - conception, identification et mise en oeuvre*. Paris: Hermès Science Publications.
- Landau, I. D., Nacer M'Sirdi, H. & M'Saad, M., 1986.** Techniques de modélisation récursives pour l'analyse spectrale paramétrique adaptative. (Recursive modelling techniques for adaptive parametric spectral analysis). *Traitement du Signal*, 3(4-5), pp. 183-204.
- Ling, L., Yamamoto, Y., Hon, Y. & Takeuchi, T., 2006.** Identification of source locations in two-dimensional heat equations. *Inverse Problems*, Volume 22, pp. 1289-1305.
- Llibre, M., 2008.** *Résolution de systèmes linéaires -Moindres carrés récursifs & Filtre de Kalman discret*. [Accès le 23 Janvier 2015] Disponible à l'adresse: http://michel.llibre.pagesperso-orange.fr/docs/DCSD-2008_069-NOT-001-1.0.pdf

- Lou, Y. & Christofides, P., 2003.** Optimal actuator/sensor placement for nonlinear control of the Kuramoto-Sivashinsky equation. *IEEE Transactions on Control*, 11(5), pp. 737-745.
- Lucidarme, P., & Simonin, O., 2015.** Cartographie et localisation simultanées multi robots, Techniques de l'ingénieur, Editions T.I., 10th May 2015.
- Mandola, F., Franzi, E. & Guignard, A., 1999.** The development of Khepera. Paderborn, Proc. Of the 1st international Khepera Workshop.
- Martinez-Gomez, L. A. & Weitzenfeld, A., 2004.** *Real Time Vision System for a Small Size League Team*. Mexico, Proceedings of the 1st IEEE Latin American Robotics Symposium .
- Mechhoud, S., Witrant, E., Dugard, L. & Moreau, D., 2012.** *Estimation de la diffusion thermique dans les plasmas de Tokamak..* Grenoble, Septième Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2012).
- Minoux, M., 2007.** *Programmation Mathématique : Théorie et Algorithmes*. 2e éd. Paris: ED Tec & Doc : Lavoisier.
- Mohammadiun, M., Rahimi, A. B. & Khazaei, I., 2011.** Estimation of the time-dependent heat flux using the temperature distribution at a point by conjugate gradient method. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(12), pp. 2443-2450.
- Morozov, V., 1994.** *Methods for solving incorrectly posed problems*. New-York: Ed. Springer-Verlag.
- Museux, N., Perez, L., Autrique, L. & Agay, D., 2003.** Skin burns after laser exposure: Histological analysis and predictive simulation. *Burns*, 38(5), pp. 658-667.
- Mu, W., Cui, B. & Zhengxian, J., 2014.** Improving control and estimation for distributed parameter systems utilizing mobile actuator-sensor network. *ISA Transactions*, 53(1), pp. 1087-1095.
- Nakano, K. & Sagara, S., 1988.** Optimal scanning measurement problem for a stochastic distributed-parameter system. *International Journal of Systems Science*, 19(7), pp. 1069-1083.
- Patan, M., 2012.** *Optimal Sensor Networks Scheduling in Identification of Distributed Parameter Systems*. 1 éd. New York: Springer Verlag.
- Pepper, D. & Heinrich, J., 2006.** *The finite element method - basic concepts and applications*. New-York, Ed Taylor & Francis.

Perez, L., 2013. *Observation strategies for mobile heating source tracking*. Albi, 4th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium, ISBN 979-10-91526-01-2.

Perez, L., Autrique, L. & Gillet, M., 2008. Implementation of a conjugate gradient algorithm for thermal diffusivity identification in a moving boundaries system. *Journal of physics*, 135(doi:10.1088/1742-6596/135/1/012082).

Petit, D. & Maillet, D., 2008. Techniques inverses et estimation de paramètres - partie 2. *Techniques de L'ingénieur*, pp. 1-24.

Pezerat, C., 1996. *Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse*. Thèse de doctorat - Ecole doctorale des sciences pour l'Ingénieur de Lyon.

Prud'homme, M. & Hung Nguyen, T., 1998. On the iterative regularization of inverse heat conduction problems by conjugate gradient method.. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 25(7), pp. 999-1008.

Radecki, P. & Hency, B., 2012. *Online building thermal parameter estimation via Unscented Kalman Filtering*. Montréal, Canada, 2012 American Control Conference.

Rafajlowicz, E. & Myska, W., 1986. Computational algorithm for input signal optimization in distributed-parameter systems identification.. *International Journal of systems Science*, 17(6), pp. 911-924.

Richalet, J., 1991. *Pratique de l'identification*. Paris: ED Hermès.

Rouquette, S., Autrique, L., Chaussavoine, C. & Thomas, L., 2007. Identification of influence factors in a thermal model of a plasma-assisted chemical vapor deposition process. *Inverse problems in science and engineering*, 15(5), pp. 489-515.

Scherze, O., Engl, H. & Kunish, K., 1993. Optimal a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems. *Journal on Numerical Analysis*, 30(6), pp. 1796-1838.

Song, Z., YangQuan, C. & JinSong, L., 2007. Optimal mobile sensor motion planning under non-holonomic constraints for parameter estimation of distributed systems. *Int. J. Intelligent Systems Technologies and Applications*, 3(3/4), pp. 277-295.

Tarantola, A., 2005. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Tikhonov, A. & Arsenin, V., 1977. *Solutions of ill-posed problems*. Washington DC: V.H. Wistom & Sons.

Tricaud, C. & Chen, Y., 2010. *D-Optimal Trajectories of Mobile Sensors with Fractional Dynamics for Parameter Estimation of Distributed Parameter Systems*. Jinan, China, Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation.

Tricaud, C. & Chen, Y., 2012. *Optimal Mobile Sensing and Actuation Policies in Cyber-physical Systems*. 1 éd. London: Springer London.

Ucinski, D., 2000a. Optimal sensor location for parameter estimation of distributed processes. *International Journal of Control*, 73(13), pp. 1235-1248.

Ucinski, D., 2000b. Optimization of sensors' allocation strategies for parameter estimation in distributed systems. *Systems Analysis Modelling Simulation*, 37(1), pp. 243-260.

Ucinski, D., 2001. Sensor motion planning with design criteria in output space. Dans: Heidelberg, éd. *mODa 6 — Advances in Model-Oriented Design and Analysis*. Puchberg/Schneeberg, Austria,: Physica-Verlag HD, pp. 251-258.

Ucinski, D., 2005. *Optimal Measurement Methods for Distributed Parameter System Identification*..:CRC Press.

Ucinski, D. & Chen, Y., 2005. *Time-optimal path planning of moving sensors for parameter estimation of distributed systems*. Seville, Spain,, Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and.

Ucinski, D. & Korbicz, J., 1999. *On robust design of sensor trajectories for parameter estimation of distributed systems*. Beijing, China, Proceedings of the 14th IFACWorld Congress.

Vergnaud, A., Perez, L. & Autrique, L., 2014. *On-line monitoring of surfacic mobile heating sources*. Cracow, Poland, Proceedings of the 8th International Conference on Inverse Problems in Engineering.

Weickgenannt, M. et al., 2013. Optimal sensor placement for state estimation of a thin double-curved shell structure. *Mechatronic*, 23(1), pp. 346-354.

Wen, L. & Chuansheng, W., 2013. A predictor-corrector iterated Tikhonov regularization for linear ill-posed inverse problems. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 221, pp. 802-818.

Yan-Bin, J., 2014. *Singular Value Decomposition (Support de Cours)*. [Accès le 28 Janvier 2015] Disponible à l'adresse : <https://www.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/svd.pdf>.

Zhou, J., Zhang, Y., Chen, J. K. & Feng, Z. C., 2010. Inverse estimation of surface heating condition in a three-dimensional object using conjugate gradient method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. *International Journal of heat and Mass Transfer*, 53(13-14), pp. 2643-2654.

Zickler, S. et al., 2009. SSL-Vision: The Shared Vision System for the RoboCup Small Size League. Dans: G. R, S. J & W. W, eds. *RoboCup 2009 Robot Soccer World Cup XIII*. s.l.:Springer, pp. 437-474.

Thèse de Doctorat

Alban VERGNAUD

Déploiement adaptatif d'un réseau de capteurs mobiles pour le suivi d'un phénomène évolutif décrit par des équations aux dérivées partielles.

Adaptive deployment of a mobile sensors network to optimize the monitoring of an evolutionary phenomenon described by partial differential equations.

Résumé

De nos jours la protection de l'environnement et des personnes nécessite le recours à des capteurs permettant de suivre le déplacement de phénomènes mobiles pour prédire et agir sur leur évolution (ex : nuages polluants, incendies, nappe d'hydrocarbures). Ces phénomènes physiques sont souvent modélisables par des équations aux dérivées partielles (EDP) éventuellement non linéaires. La mise au point d'un outil prédictif pour l'aide à la décision nécessite l'évaluation de certains paramètres d'entrée. Dans ces domaines, les capteurs sont en général coûteux et en nombre limité. Toutefois, avec les récentes avancées technologiques il devient envisageable de concevoir des systèmes mobiles peu coûteux et de déployer un groupe de véhicules en réseau dans un certain nombre d'environnements à risque.

Le sujet de recherche étudié et présenté dans ce rapport concerne le développement et la validation de stratégies optimales de déplacement d'un ensemble de capteurs pour l'identification paramétrique en ligne des systèmes d'EDP caractérisés par une ou plusieurs sources mobiles. Le travail présenté est destiné à développer une méthodologie complète (théorie, méthodes numériques, plate-forme expérimentale) en vue de réaliser une conception optimale d'expériences dans le cadre de problèmes mal posés non-linéaires associés à l'évaluation de paramètres dans des systèmes décrits par des EDP en génie thermique.

Mots clés

Problème inverse, Identification paramétrique, Procédé thermique, Méthode du gradient conjugué, Expérimentation

Abstract

Nowadays the environment and people protection requires the use of sensors in order to monitor the movement of mobile phenomena and to predict and act on their evolution (ex: polluting cloud, fires, oil spill). These physical phenomena are often modelled by non-linear partial differential equations (PDE). Development of a predictive tool for the decision support requires the assessment of some input parameters. In such a context, sensors were generally expensive. However, recent technological advances have reduced manufacturing costs and it becomes possible to develop low-cost mobile systems and to deploy a group of networked vehicles in potentially risky environments.

Research topic studied and presented in this thesis concerns the development and validation of optimal strategies for moving a set of sensors for the parametric identification of PDE systems characterized by one or more mobile heating sources. This work is intended to develop a comprehensive methodology (theory, numerical methods, and experimentation) in order to achieve an optimal design of experiments in the context of nonlinear ill-posed problems related to the evaluation of parameters in systems described by PDE in thermal engineering.

Keywords

Inverse problem, parametric identification, thermal process, Conjugate Gradient Method, Experimentation